

Cuadernillo de matemática para 6to año

Pf Juan Roballo

Marzo 2026

versión 1.0

Índice

1. Repaso	5
1.1. Números enteros	5
1.1.1. Suma y resta en $\mathbb{Z}$	5
1.1.2. Multiplicación y división en $\mathbb{Z}$	5
1.2. Ecuaciones lineales	6
1.2.1. Resolución de ecuaciones lineales	6
1.3. Ecuaciones cuadráticas	7
1.3.1. Ecuaciones cuadráticas incompletas ($b = 0$)	7
1.3.2. Ecuaciones cuadráticas incompletas ($c = 0$)	8
1.3.3. Ecuaciones cuadráticas completas	9
1.4. Función cuadrática	10
1.4.1. Representación gráfica	10
1.5. Polinomios	13
1.5.1. Propiedades de la potenciación	13
1.5.2. Operaciones entre polinomios	14
1.5.3. Factorización	16
1.6. Actividades	19
2. Números complejos en forma binómica	23
2.1. Definición de número complejo	23
2.2. Potencias de la unidad imaginaria	24
2.3. Operaciones con números complejos en forma binómica	24
2.3.1. Suma y resta	24
2.3.2. Multiplicación	25
2.3.3. Conjugado de un número complejo	25
2.3.4. División	26
2.4. Actividades	27
3. Números complejos en forma polar	29
3.1. Representación gráfica	29
3.2. Módulo de Z	29
3.3. Argumento de Z	29
3.4. Pasaje de forma binómica a forma polar	29
3.5. Pasaje de forma polar a forma binómica	30
3.6. Operaciones en forma polar	31
3.6.1. Multiplicación	31
3.6.2. División	31
3.6.3. Potenciación	32
3.6.4. Radicación	32
3.7. Actividades	33
4. Vectores	35
4.1. Definición	35
4.2. Elementos de un vector	35
4.3. Vectores particulares	36
4.4. Coordenadas de un vector	36
4.5. Módulo	37
4.6. Suma de vectores	37

4.7. Multiplicación de un escalar por un vector	38
4.8. Vector unitario	39
4.9. Producto escalar entre dos vectores	39
4.9.1. Ángulo entre dos vectores	40
4.9.2. Proyección de un vector sobre otro	40
4.10. Ecuación vectorial de la recta	42
4.11. Actividades	43
5. Funciones trigonométricas	45
5.1. Sistema circular	45
5.2. Función seno	46
5.3. Función coseno	47
5.4. Función tangente	47
5.5. Coeficientes de las funciones trigonométricas	47
5.6. Como graficar la función seno	49
5.7. Actividades	51
6. Límites	53
6.1. Concepto de límite	53
6.2. Límite en un punto	54
6.3. Límites laterales	55
6.4. Límites tendiendo a infinito	57
6.5. Límites indeterminados	58
6.5.1. Comparación de infinitos	58
6.5.2. Cociente de polinomios	59
6.5.3. Factorización	60
6.6. Actividades	63

1. Repaso

1.1. Números enteros

1.1.1. Suma y resta en $\mathbb{Z}$

Cuando se suman o restan números enteros además del signo de la operación se tiene el signo de cada número. Y para realizar la operación primero se tiene que dejar un solo signo para cada número.

Con sumas

Sumar un número positivo es agregar una cantidad. *Ejemplo:* $5 + (+1) = 5 + 1$

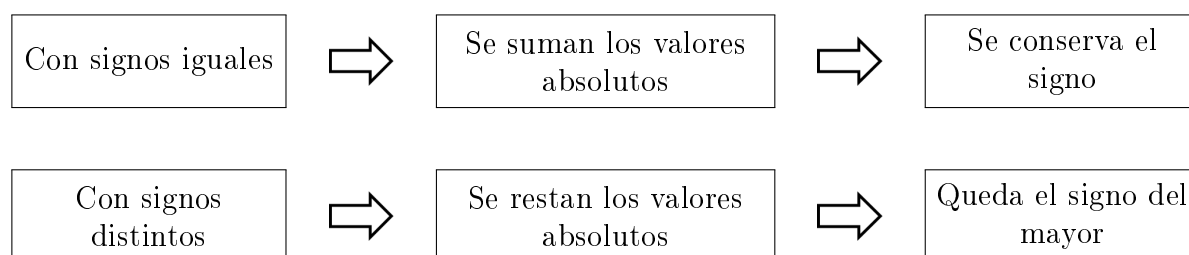
Sumar un número negativo es quitar una cantidad. *Ejemplo:* $5 + (-1) = 5 - 1$

Con restas

Restar un número positivo es quitar una cantidad. *Ejemplo:* $5 - (+1) = 5 - 1$

Restar un número negativo es agregar una cantidad. *Ejemplo:* $5 - (-1) = 5 + 1$

En resumen:



1.1.2. Multiplicación y división en $\mathbb{Z}$

Al multiplicar o dividir números enteros, realizaremos la multiplicación/división de los valores absolutos y le asignaremos el signo al resultado de acuerdo a la siguiente regla.

Regla de signos

+	$\times/\div$	+	=	+
+	$\times/\div$	-	=	-
-	$\times/\div$	+	=	-
-	$\times/\div$	-	=	+

La regla de signos se puede resumir diciendo que *con signos iguales el resultado es positivo* y con *signos distintos es negativo*.

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} 8 \cdot (-4) = -32 & -45 \div (-3) = 15 \\ -12 \cdot (-2) = 24 & 24 \div (-6) = -4 \\ 15 \cdot 5 = 75 & 80 \div 4 = 20 \\ -9 \cdot 7 = -63 & -18 \div 9 = -2 \end{array}$$

1.2. Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad donde existe un número desconocido que llamaremos incógnita. Resolver una ecuación es hallar el valor de la incógnita que verifique dicha igualdad. Para lograr esto nos valemos de la propiedad uniforme. Esta dice que si operamos de la misma manera a cada lado de la igualdad esta sigue valiendo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} 3x - 7 = 5 & \\ 3x - 7 + 7 = 5 + 7 & \leftarrow \text{sumamos } 7 \text{ en cada miembro} \\ 3x = 12 & \\ 3x \div 3 = 12 \div 3 & \leftarrow \text{ahora dividimos por } 3 \\ x = 4 & \leftarrow \text{hemos resuelto de ecuación} \end{array}$$

1.2.1. Resolución de ecuaciones lineales

La forma práctica de resolver una ecuación lineal es despejar la incógnita. Las reglas para despejar la incógnita son las siguientes:

- Lo que está sumando pasa restando.
- Lo que está restando pasa sumando.
- Lo que está multiplicando pasa dividiendo.
- Lo que está dividiendo pasa multiplicando.

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{ll} 7x + 8 = 3x - 4 & \\ 7x + 8 - 3x = -4 & \leftarrow \text{pasamos los términos con } x \text{ de un lado} \\ 7x - 3x = -4 - 8 & \leftarrow \text{pasamos los términos sin } x \text{ del otro lado} \\ 4x = -12 & \leftarrow \text{sumamos en ambos miembros} \\ x = -12 \div 4 & \leftarrow \text{pasamos el coeficiente de la } x \text{ dividiendo} \\ x = -3 & \leftarrow \text{resolvimos la ecuación} \end{array}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}
3 \cdot (2x - 4) &= -2x + 4 \\
6x - 12 &= -2x + 4 &< \text{aplicamos propiedad distributiva} \\
6x + 2x &= 4 + 12 &< \text{juntamos las } x \\
8x &= 16 &< \text{sumamos} \\
x &= 16 \div 8 &< \text{pasamos el coeficiente de la } x \\
x &= 2 &< \text{resolvimos la ecuación}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}
\frac{5x - 12}{2} &= \frac{-3x + 17}{3} \\
(5x - 12) \cdot 3 &= (-3x + 17) \cdot 2 &< \text{pasamos los denominadores multiplicando} \\
15x - 36 &= -6x + 34 &< \text{aplicamos propiedad distributiva} \\
15x + 6x &= 34 + 36 &< \text{juntamos las } x \\
21x &= 70 &< \text{sumamos} \\
x &= 70 \div 21 &< \text{pasamos el coeficiente de la } x \\
x &= \frac{10}{3} &< \text{resolvimos la ecuación}
\end{aligned}$$

1.3. Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado, son aquellas que pueden reducirse a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Donde a, b y c son los coeficientes de los términos cuadrático, lineal e independiente respectivamente. Cuando b o c son nulos decimos que la ecuación es incompleta.

1.3.1. Ecuaciones cuadráticas incompletas ($b = 0$)

Cuando la ecuación cuadrática no tiene término lineal podemos despejar la incógnita.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
x^2 - 4 &= 0 \\
x^2 &= 4 \\
|x| &= \sqrt{4} \\
x &= \pm 2 \\
\swarrow \quad \searrow \\
x_1 &= 2 \quad x_2 = -2
\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}8x^2 - 80 + 2x &= 2x + 95 + x^2 \\8x^2 - x^2 + 2x - 2x &= 95 + 80 \\7x^2 &= 175 \\x^2 &= 175 \div 7 \\x^2 &= 25 \\|x| &= \sqrt{25} \\x &= \pm 5 \\&\swarrow \quad \searrow \\x_1 &= 5 \quad \quad x_2 = -5\end{aligned}$$

1.3.2. Ecuaciones cuadráticas incompletas ($c = 0$)

Cuando la ecuación cuadrática no tiene término independiente podemos despejar la incógnita aplicando factor común.

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x &= -5x \\2x^2 + 3x + 5x &= 0 \\2x^2 + 8x &= 0 \\x(2x + 8) &= 0 \\&\swarrow \quad \searrow \\x = 0 \quad \text{ó} \quad 2x + 8 &= 0 \\&\quad \quad \quad 2x = -8 \\&\quad \quad \quad x = -8 \div 2 \\&\quad \quad \quad x = -4 \\&\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\x_1 &= 0 \quad \quad \quad x_2 = -4\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}
7x^2 - x + 3 &= 2x + 3 - x^2 \\
7x^2 - x + 3 - 2x - 3 + x^2 &= 0 \\
8x^2 - 3x &= 0 \\
x(8x - 3) &= 0 \\
&\swarrow \searrow \\
x = 0 &\quad \text{ó} \quad 8x - 3 = 0 \\
& & 8x = 3 \\
& & x = 3 \div 8 \\
& & x = \frac{3}{8} \\
\downarrow & & \downarrow \\
x_1 = 0 & & x_2 = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

1.3.3. Ecuaciones cuadráticas completas

Tendremos una ecuación cuadrática completa cuando los tres coeficientes sean distintos de cero. Estas ecuaciones la podremos resolver con la *fórmula resolvente* o *fórmula de Baskara*. Cabe aclarar que esta fórmula también podemos usarla para resolver los casos anteriores.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
x^2 - 6x - 7 &= 0 \implies a = 1 \quad b = -6 \quad c = -7 \\
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} \\
x &= \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} \\
x &= \frac{6 \pm 8}{2} \\
&\swarrow \searrow \\
x_1 &= \frac{6 + 8}{2} \quad x_2 = \frac{6 - 8}{2} \\
x_1 &= \frac{14}{2} \quad x_2 = \frac{-2}{2} \\
x_1 &= 7 \quad x_2 = -1
\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned}3x^2 + 5x - 4 &= x^2 - 2x \\3x^2 + 5x - 4 - x^2 + 2x &= 0 \\2x^2 + 7x - 4 &= 0 \implies a = 2 \quad b = 7 \quad c = -4 \\x &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} \\x &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} \\x &= \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{4} \\x &= \frac{-7 \pm 9}{4} \\&\swarrow \quad \searrow \\x_1 &= \frac{-7 + 9}{4} \quad x_2 = \frac{-7 - 9}{4} \\x_1 &= \frac{2}{4} \quad x_2 = \frac{-16}{4} \\x_1 &= \frac{1}{2} \quad x_2 = -4\end{aligned}$$

Ejemplo 3:

$$\begin{aligned}-x^2 - 6x + 12 &= 2x - 2x^2 - 2x + 7 \\-x^2 - 6x + 12 - 2x + 2x^2 + 2x - 7 &= 0 \\x^2 - 4x + 5 &= 0 \implies a = 1 \quad b = -4 \quad c = 5 \\x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \\x &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{4} \\x &= \emptyset\end{aligned}$$

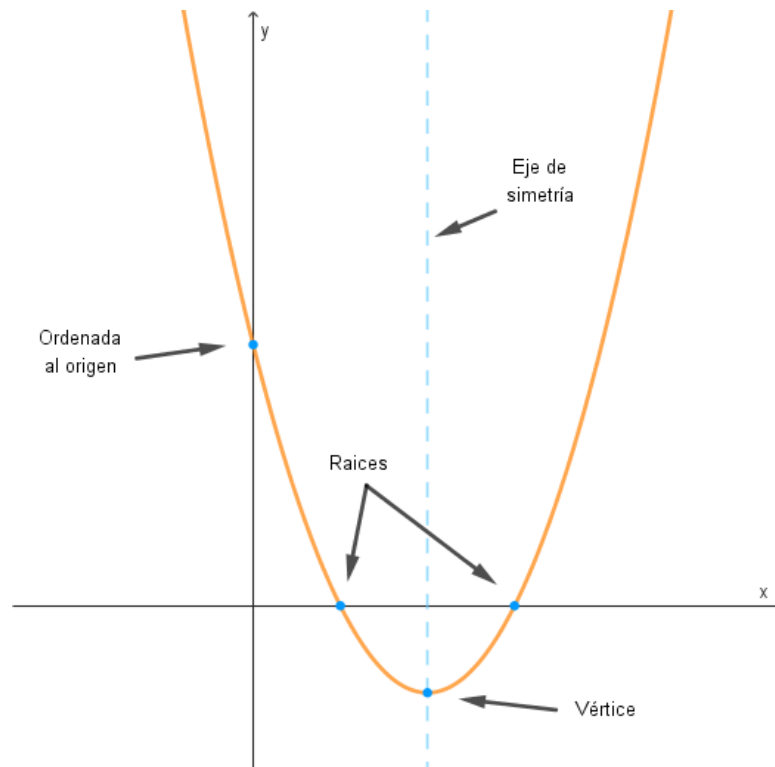
1.4. Función cuadrática

La función cuadrática tiene la siguiente expresión polinómica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0$$

1.4.1. Representación gráfica

La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola. La parábola tendrá las ramas hacia arriba cuando el coeficiente del término cuadrático sea positivo y hacia abajo cuando este sea negativo. En el siguiente gráfico se pueden ver los elementos de la parábola.



Raíces

Las raíces de una función determinan las intersecciones de su gráfica con el eje de abscisas (eje x). Para hallar las raíces a partir de la fórmula de una función cuadrática se plantea una ecuación igualando dicha fórmula a cero.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Vértice

El vértice de la parábola es el punto donde la función pasa de ser creciente a decreciente o viceversa, por lo tanto este es un mínimo o un máximo de la función. El vértice tiene las siguientes coordenadas:

$$V = (x_v; y_v)$$

donde

$$x_v = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

$$y_v = f\left(\frac{-b}{2 \cdot a}\right) = \frac{-b^2}{4 \cdot a} + c$$

Eje de simetría

El eje de simetría es una recta vertical que corta a la parábola por la mitad. Tiene una ecuación de la forma $x = k$ donde:

$$k = \frac{-b}{2 \cdot a}$$

Ordenada al origen

La ordenada al origen es el punto de intersección de la gráfica con el eje de ordenadas (eje y). Este punto esta representado en la fórmula por el término independiente.

$$y_0 = c$$

Ejemplo:

Vamos a graficar la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ para lo cual tendremos que hallar sus raices, vértice y ordenada al origen.

Raices:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x - 3 = 0 &\implies a = 1 \quad b = 2 \quad c = -3 \\x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\x &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \\x &= \frac{-2 \pm 4}{2} \\&\swarrow \quad \searrow \\x_1 &= \frac{-2 + 4}{2} \quad x_2 = \frac{-2 - 4}{2} \\x_1 &= \frac{2}{2} \quad x_2 = \frac{-6}{2} \\x_1 &= 1 \quad x_2 = -3\end{aligned}$$

Vértice:

$$x_v = \frac{-2}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

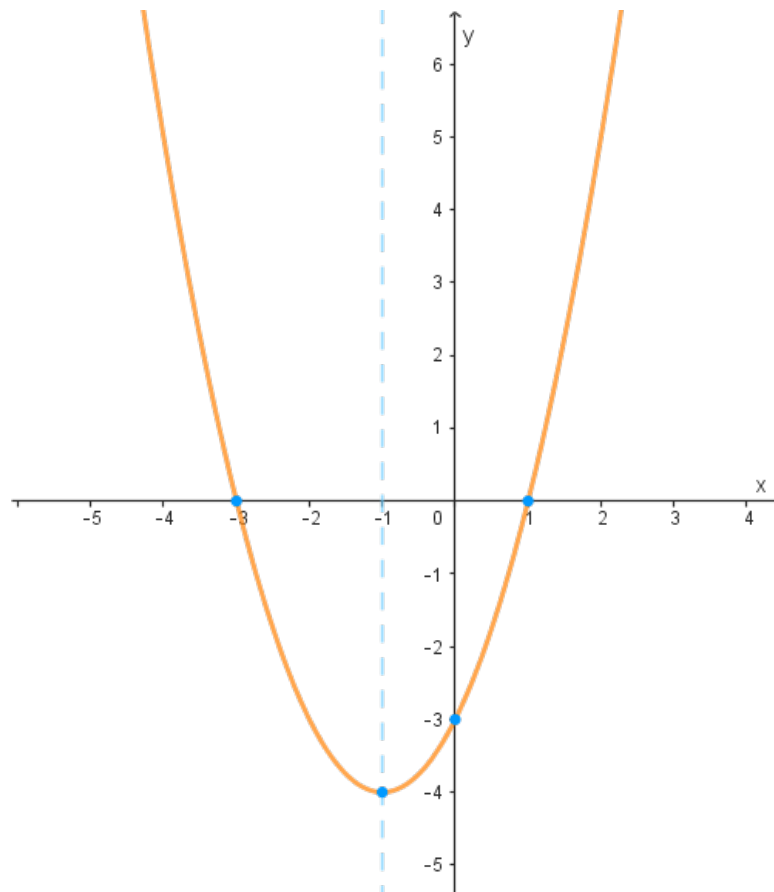
$$y_v = \frac{-2^2}{4 \cdot 1} - 3 = \frac{-4}{4} - 3 = -1 - 3 = -4$$

$$V = (-1; -4)$$

Ordenada al origen:

$$y_0 = -3$$

Gráfica:



1.5. Polinomios

Antes de abordar el tema de los polinomios es bueno repasar algunas propiedades de la potenciación.

1.5.1. Propiedades de la potenciación

■ Multiplicación de potencias de igual base

El producto de dos potencias que tienen la misma base es igual a una potencia de dicha base que tiene como exponente la suma de los exponentes, es decir:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

■ División de potencias de igual base

El cociente de dos potencias con la misma base es igual a la potencia de dicha base que tiene como exponente el resultado de restar el exponente del divisor al del dividendo, es decir:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

■ Potencia de un producto (distributiva respecto de la multiplicación)

La potencia de un producto es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente, es decir:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

■ **Potencia de un cociente (distributiva respecto de la división)**

La potencia de un cociente es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

■ **Potencia de exponente cero**

Todo número distinto de cero elevado a la cero es igual a uno.

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

■ **Potencia de potencia**

La potencia de otra potencia es igual a una potencia de igual base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

1.5.2. Operaciones entre polinomios

Ante de ver las operaciones entre polinomios recordemos que es un polinomio.

Un polinomio es una expresión algebraica formada por la suma de uno o más términos, donde cada uno de ellos es un producto de un número real (coeficiente) y una variable (en general la x) elevada a un exponente natural.

Ejemplos de polinomios:

$$P(x) = x^3 - 3x + 4$$

$$Q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$S(x) = -5x^2 + 2x$$

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar polinomios, debes identificar y agrupar los términos semejantes (los que tienen la misma variable y exponente) y luego sumar o restar sus coeficientes, dejando la parte literal igual.

La manera práctica de sumar dos polinomios es, una vez que estos están reducidos, ordenados y completos, disponerlos uno debajo del otro, encolumnando los términos semejantes. Luego bastará sumar o restar los coeficientes.

Ejemplo

Vamos a hacer la suma $P(x) + Q(x)$

$$P(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad Q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$$

Los disponemos uno sobre otro encolumnando los términos semejantes para realizar la suma.

$$\begin{array}{r} P(x) = x^3 + 0x^2 - 3x + 4 \\ + Q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ \hline P(x) + Q(x) = 2x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 2x + 5 \end{array}$$

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar polinomios, se aplica la propiedad distributiva; cada término del primer polinomio se multiplica por cada término del segundo, usando la regla de signos y sumando los exponentes de las variables (producto de potencias de igual base). Por último se deberán sumar los términos semejantes.

Ejemplo

Vamos a hacer la multiplicación $P(x) \cdot S(x)$

$$P(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad S(x) = -5x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot S(x) &= (x^3 - 3x + 4)(-5x^2 + 2x) \\ P(x) \cdot S(x) &= x^3(-5x^2) + (-3x)(-5x^2) + 4(-5x^2) + x^3 \cdot 2x - 3x \cdot 2x + 4 \cdot 2x \\ P(x) \cdot S(x) &= -5x^5 + 15x^3 - 20x^2 + 2x^4 - 6x^2 + 8x \\ P(x) \cdot S(x) &= -5x^5 + 2x^4 + 15x^3 - 26x^2 + 8x \end{aligned}$$

División de polinomios

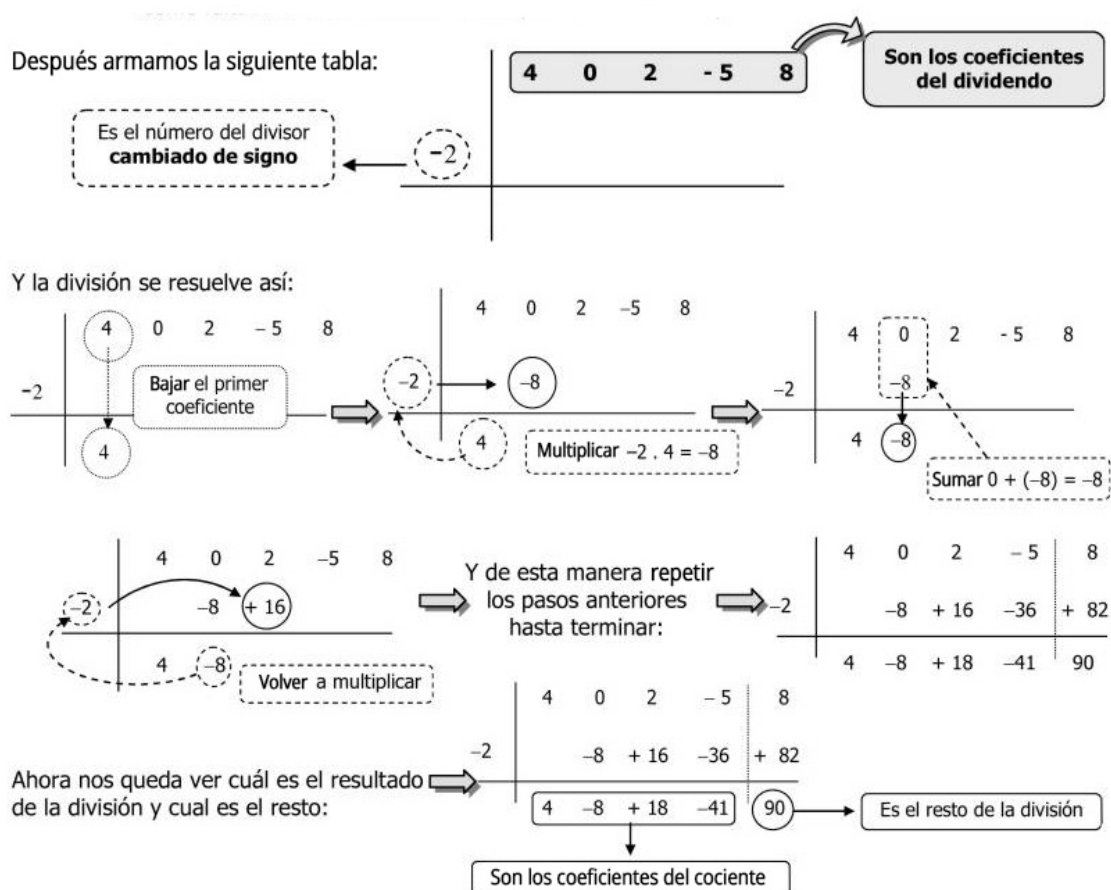
En este curso sólo abordaremos la división por la regla de Ruffini. Este método permite dividir cualquier polinomio por otro de la forma $x - a$.

Ejemplo:

Dividiremos el polinomio $P(x) = 4x^4 + 2x^2 - 5x + 8$ por $Q(x) = x + 2$

En primer lugar debemos completar el polinomio $P(x)$

$$P(x) = 4x^4 + 2x^2 - 5x + 8 \longrightarrow P(x) = 4x^4 + 0x^3 + 2x^2 - 5x + 8$$



$$\Rightarrow \text{Cociente: } C(x) = 4x^3 - 8x^2 + 18x - 41 \quad \text{Resto: } R(x) = 90$$

1.5.3. Factorización

Factor común

Extraer factor común lo podemos ver como el proceso inverso de aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

$$ab + ac = a(b + c)$$

Ejemplo 1:

En el polinomio $2x^3 + 4x^2 - 10x$ podemos extraer $2x$ como factor común.

$$2x^3 + 4x^2 - 10x \Rightarrow 2x \left(\frac{2x^3}{2x} + \frac{4x^2}{2x} - \frac{10x}{2x} \right) \Rightarrow 2x(x^2 + 2x - 5)$$

Ejemplo 2:

Del polinomio $-9x^5 + 3x^2 - 12x^4$ extraeremos $3x^2$ como factor común.

$$-9x^5 + 3x^2 - 12x^4 \Rightarrow 3x^2 \left(\frac{-9x^5}{3x^2} + \frac{3x^2}{3x^2} - \frac{12x^4}{3x^2} \right) \Rightarrow 3x^2(-3x^3 + 1 - 4x^2)$$

Diferencia de cuadrados

Estamos ante una diferencia de cuadrados cuando tenemos la resta de dos términos y cada uno de ellos es una variable o un número elevado al cuadrado. Este polinomio se puede factorizar como el producto de dos binomios conjugados.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Ejemplo 1:

$$x^2 - 9 \implies x^2 - 3^2 \implies (x - 3)(x + 3)$$

Ejemplo 2:

$$4x^2 - 36 \implies (2x)^2 - 6^2 \implies (2x - 6)(2x + 6)$$

Ejemplo 3:

Del polinomio $3x^3 - 75x$ en primer lugar extraeremos $3x$ como factor común.

$$3x^3 - 75x \implies 3x \left(\frac{3x^3}{3x} - \frac{75x}{3x} \right) \implies 3x(x^2 - 25)$$

Ahora aplicamos diferencia de cuadrados.

$$3x(x^2 - 25) \implies 3x(x^2 - 5^2) \implies 3x(x - 5)(x + 5)$$

Trinomio cuadrado perfecto

El trinomio cuadrado perfecto es el desarrollo de un binomio al cuadrado.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

O bien:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo 1:

$$x^2 - 10x + 25 \implies x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \implies (x - 5)^2$$

Ejemplo 2:

$$4x^2 + 12x + 9 \implies (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 \implies (2x + 3)^2$$

Ejemplo 3:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 \implies (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 3x + (3x)^2 \implies (x^2 + 3x)^2$$

Ejemplo 4:

En el polinomio $9x^3 - 24x^2 + 16x$ en primer lugar aplicamos factor común.

$$9x^3 - 24x^2 + 16x \implies x \left(\frac{9x^3}{x} - \frac{24x^2}{x} + \frac{16x}{x} \right) \implies x(9x^2 - 24x + 16)$$

Luego aplicamos trinomio cuadrado perfecto.

$$x(9x^2 - 24x + 16) \implies x[(3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot (-4) + (-4)^2] \implies x(3x - 4)^2$$

Teorema del resto y regla de Ruffini

Si sabemos que a es una raíz de $P(x)$, por el teorema del resto podemos inferir que $x - a$ divide a $P(x)$, o lo que es igual:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$$

Utilizando la regla de Ruffini podemos hallar $Q(x)$

Ejemplo 1

Sabiendo que $x = 5$ es una raíz de $2x^3 - 13x^2 + 16x - 5$ utilizaremos la regla de Ruffini para factorizarlo.

Realizamos la división $(2x^3 - 13x^2 + 16x - 5) : (x - 5)$ por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -13 & 16 & -5 \\ 5 & & 10 & -15 & 5 \\ \hline & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\implies Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\implies 2x^3 - 13x^2 + 16x - 5 = (x - 5)(2x^2 - 3x + 1)$$

Ejemplo 2

El polinomio $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ tiene como raíz a $x = -2$

Realizamos la división $(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) : (x + 2)$ por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -9 & -18 \\ -2 & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$$\implies Q(x) = x^2 - 9$$

$$\implies x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = (x + 2)(x^2 - 9)$$

Ahora aplicamos diferencia de cuadrados.

$$(x + 2)(x^2 - 9) \implies (x + 2)(x - 3)(x + 3)$$

“Me lo contaron y lo olvidé; lo vi y lo entendí; lo hice y lo aprendí”. Confucio.

1.6. Actividades

Números enteros

1. Reescribir las siguientes operaciones suprimiendo los paréntesis y luego calcular .

$$a) (-15) - (-39) =$$

$$b) (-26) + (+30) =$$

$$c) (+40) + (-33) =$$

$$d) (-11) + (+32) =$$

$$e) (-22) - (+18) =$$

$$f) (+18) + (-26) =$$

$$g) (+15) + (-40) =$$

$$h) (-46) - (+18) =$$

$$i) (+18) + (-2) =$$

$$j) (-37) - (-47) =$$

$$k) (+48) - (-4) =$$

$$l) (+6) - (-2) =$$

$$m) (-5) - (+48) =$$

$$n) (+26) - (+24) =$$

$$\tilde{n}) (-26) + (-9) =$$

$$o) (-3) + (+46) =$$

$$p) (-32) - (+37) =$$

$$q) (+2) - (+37) =$$

$$r) (+9) - (-16) =$$

$$s) (-17) + (+12) =$$

2. Realizar los siguientes cálculos combinados

$$a) 6 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 5 + 13 - 8 : 4 - 9 \cdot 2 : 3 - 1 =$$

$$b) 3 - [-5 \cdot 6 - 4 \cdot (12 : 4 - 5 \cdot 2) - 24 : 3] =$$

$$c) 2 - 3 \cdot [-2 + 10 - 4 \cdot (-1 + 3 \cdot 3) - 8] - 2 =$$

$$d) -4 - 2 \cdot [-3 - 4 : (6 - 4 \cdot 2) - (8 - 2) : (8 - 5 \cdot 2)] =$$

$$e) [-6 \cdot (2 - 5) + 5 \cdot (4 - 7)] \cdot [(3 - 8) \cdot (2 - 5) : (1 - 4)]$$

$$f) [(3 \cdot 4 - 2 \cdot 5) \cdot (1 - 5)] : [-3 \cdot (5 - 7) - (1 - 3)] =$$

$$g) 6 - \left[3 - [-13 + 3 \cdot (-2)^2]^5 \right] - [4 - (-2)^3] + 6 =$$

$$h) (-2)^3 - (-3)^2 + [(-1)(-3)]^2 + [(-10) : 5]^3 + 4^2 =$$

$$i) \sqrt[3]{-24 - 3} + \sqrt{2^3 - (-1)^7} - [2 - 4 \cdot (-1)^5] + [(2)^3 : (-2)^2]^0 =$$

$$j) - [(2)^2 - (-3) \cdot (-1)^4] + \sqrt[3]{(-2)^2 \cdot 5 + 7} - [(4)(-3 + 5) + 1]^2 =$$

Ecuaciones lineales

3. Resolver las siguientes ecuaciones lineales

$$a) 3x + 5 = 5x - 13$$

$$b) 5(7 - x) = 31 - x$$

$$c) 4(2 - 3x) = -2x - 27$$

$$d) 6x - 8 = 4(-2x + 5)$$

$$e) 3(2x - 2) = 2(3x + 9)$$

$$f) 3(4x + 7) = 4x - 25$$

$$g) 7x + 15 = 3(3x - 7)$$

$$h) \frac{4x + 1}{3} = \frac{12x - 3}{7}$$

$$i) \frac{4x}{15} - \frac{6x + 28}{5} = 0$$

$$j) \frac{7x - 6}{3} - x - 2 = 4x + 2$$

“Nadie que es curioso es tonto. Las personas que no hacen preguntas permanecen ignorantes el resto de sus vidas”. Neil deGrasse Tyson.

Ecuaciones cuadráticas

4. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas ($b = 0$)

a) $x^2 - 16 = 0$

d) $3x^2 - 19 + x = 30 + x + 2x^2$

b) $2x^2 = 50$

e) $x^2 - 1 = 3x^2 + 10$

c) $80 + 2x^2 = 8$

f) $2x + 2x^2 - 51 = 70 + 2x + x^2$

5. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas ($c = 0$)

a) $x^2 - 4x = 0$

d) $2x(x + 1) = x^2$

b) $2x^2 = 10x$

e) $x(x + 10) = 2(x^2 - x)$

c) $3x^2 + 5 = x^2 + x + 5$

f) $3 + 4x^2 - 3x = 3(x^2 + 1 + 2x)$

6. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas completas

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

g) $18 = 6x + x(x - 13)$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

h) $4 - 2x^2 - 5x = 3 - 8x^2$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

i) $x(x - 4) + 8 = -5$

d) $x^2 + x + 1 = 0$

j) $x^2 + (x + 2)^2 = 580$

e) $x^2 - 5x = 84$

k) $2x^2 - 3 = 1 - 2x + x^2$

f) $7x^2 - 28 = -21x$

l) $(x + 1)(x - 1) = 2(x^2 - 13)$

Función cuadrática

7. Hallar raíces (si existen), vértice y ordenada al origen de cada una de las siguientes funciones cuadráticas y graficarlas en un sistema de coordenadas.

a) $f(x) = x^2 - x - 2$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 5$

b) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

g) $f(x) = -x^2 - 6x - 9$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

h) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

i) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

e) $f(x) = x^2 - 2x + 4$

j) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

“He fallado una y otra vez a lo largo de mi vida. Es por eso por lo que he tenido éxito”. Michael Jordan.

Polinomios

8. Resolver aplicando las propiedades de la potenciación.

$$a) a^5 \cdot a^3 =$$

$$e) \left(\frac{x}{y}\right)^5 =$$

$$i) \frac{x^3 \cdot x^2}{x^5} =$$

$$b) x^2 \cdot x^3 =$$

$$f) (n^4)^3 =$$

$$j) \left(\frac{m^5}{m^2} \cdot n^2 \cdot n\right)^3 =$$

$$c) \frac{m^5}{m^2} =$$

$$g) (x^3 \cdot x^{-1})^2 =$$

$$k) (3x^3)^2 \cdot \frac{8x^3}{2x^x} =$$

$$d) (m \cdot x)^2 =$$

$$h) (a^2 \cdot b^3)^2 =$$

$$l) \frac{5xy^2 \cdot 6x^4y}{3x^2} =$$

9. Dados los siguientes polinomios, realizar las operaciones indicadas

$$P(x) = x^4 - x^2 + 11x + 4$$

$$R(x) = 3x^2 - 4x - 7$$

$$T(x) = x + 2$$

$$Q(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 8$$

$$S(x) = -2x + 9$$

$$V(x) = x - 3$$

$$a) P(x) + Q(x) =$$

$$e) P(x) \cdot S(x) =$$

$$i) P(x) \div T(x) =$$

$$b) R(x) + S(x) =$$

$$f) Q(x) \cdot R(x) =$$

$$j) S(x) \div V(x) =$$

$$c) P(x) - R(x) =$$

$$g) S(x) \cdot V(x) =$$

$$k) Q(x) \div T(x) =$$

$$d) S(x) - V(x) =$$

$$h) Q(x) \cdot P(x) =$$

$$l) R(x) \div V(x) =$$

10. Factorizar los siguientes polinomios aplicando factor común

$$a) x^3 + 2x^2$$

$$c) 4x^2 - 3x^4$$

$$b) 3x^3 - 6x^2 + 12$$

$$d) 10 + 5x^2 - 20x$$

11. Factorizar aplicando diferencia de cuadrados

$$a) x^2 - 25$$

$$c) 4x^2 - 81$$

$$b) x^2 - 49$$

$$d) x^4 - 4x^2$$

12. Factorizar aplicando trinomio cuadrado perfecto

$$a) x^2 + 6x + 9$$

$$c) 4x^2 - 20x + 25$$

$$b) x^2 - 12x + 36$$

$$d) 49 - 14x + x^2$$

13. Factorizar utilizando el método de Ruffini. Se indica entre paréntesis una de sus raíces.

$$a) x^4 - 6x^3 + 10x^2 + x - 10 \quad (x_1 = 2)$$

$$c) 3x^2 + 2x^2 + 3x + 4 \quad (x_1 = -1)$$

$$b) 2x^3 - 13x - 15 \quad (x_1 = 3)$$

$$d) 2x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 6 \quad (x_1 = -2)$$

2. Números complejos en forma binómica

Resolvamos la siguiente ecuación:

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

Como llegamos a un discriminante negativo sabemos que esta ecuación no tiene solución real. Pero sigamos adelante:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{2}{2} \pm \frac{4}{2} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x = 1 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}$$

Si decimos que $\sqrt{-1} = i$ entonces tenemos:

$$x = 1 \pm 2i$$

2.1. Definición de número complejo

Un número complejo es una expresión del tipo:

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e i se conoce como unidad imaginaria. El número a es la parte real y b la parte imaginaria del número complejo z .

$$\operatorname{Re}[z] = a; \operatorname{Im}[z] = b$$

Esta forma de expresar un número complejo se denomina forma binómica. El conjunto de los números complejos lo indicamos con la letra $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge i = \sqrt{-1}\}$$

Retomando el ejemplo anterior la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas: $x_1 = 1 + 2i$ y $x_2 = 1 - 2i$

2.2. Potencias de la unidad imaginaria

Por definición $i = \sqrt{-1}$ entonces $i^2 = -1$.

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Como se puede ver las potencias sucesivas de la unidad imaginaria son: $\{1; i; -1; -i; \}$. En general se tiene que:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

con $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo: calculamos la siguiente potencia i^{39}

Dividimos 39 entre 4 y obtenemos que:

$$39 = 4 \cdot 9 + 3$$

entonces:

$$i^{4 \cdot 9 + 3} = i^3 = -i$$

2.3. Operaciones con números complejos en forma binómica

2.3.1. Suma y resta

La suma o la resta de números complejos se realizan sumando o restando las partes reales y las partes imaginarias de cada número complejo entre sí.

Dados dos números complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo: Sean $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 + 4i$

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + 4i) = (2 + 1) + (3 + 4)i = 3 + 7i$$

2.3.2. Multiplicación

Para multiplicar dos números complejos aplicamos la propiedad distributiva.

Dados dos números complejos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Como $i^2 = -1$, entonces tenemos:

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bd \cdot (-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo:

Sean: $z_1 = 1 + 3i$ y $z_2 = 2 - 4i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 3i) \cdot (2 - 4i) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4i + 3 \cdot 2i - 3i \cdot 4i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 - 4i + 6i - 12i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 - 4i + 6i - 12 \cdot (-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2 - 4i + 6i + 12$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 12) + (-4 + 6)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 14 + 2i$$

2.3.3. Conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo es otro complejo que tiene la misma parte real y su parte imaginaria es el opuesto de la parte imaginaria del primero. El conjugado de un número se indica con un sobre rayado.

Dado $z = a + bi$ su conjugado será $\bar{z} = a - bi$

Ejemplo:

Sea $z_1 = -4 + 5i$ entonces $\bar{z}_1 = -4 - 5i$

Propiedad:

Cuando multiplicamos un número complejo por su propio conjugado, obtenemos un número real que es el resultado de sumar los cuadrados de sus componentes.

Sea $z = a + bi$ entonces:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

2.3.4. División

Para realizar la división de un número complejo por otro, multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

Multiplicando dividendo y divisor por el conjugado del divisor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 3 - 4i$ y $z_2 = -6 + 2i$

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 - 4i}{-6 + 2i} = \frac{(3 - 4i) \cdot (-6 - 2i)}{(-6 + 2i) \cdot (-6 - 2i)} = \frac{(-18 - 8) + (-6 + 24)i}{(-6)^2 + 2^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{-26 + 18i}{36 + 4} = \frac{-26 + 18i}{40} = -\frac{26}{40} + \frac{18i}{40} = -\frac{13}{20} + \frac{9}{20}i\end{aligned}$$

“Una persona que nunca cometió un error nunca intentó nada nuevo”. Albert Einstein.

2.4. Actividades

1. Hallar las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 + 6x + 25 = 0$

f) $-2x^2 + 6x = 34 - x^2$

b) $x^2 + 4 = 0$

g) $x(x - 4) + 8 = -5$

c) $-2x^2 - 8x = 16$

h) $x^2 + 1 + 2x = -4x - 9$

d) $x^2 - 2x + 8 = 3$

i) $3x^2 - 10x = x^2 + 10x - 68$

e) $x^2 + 7 = 2x + 5$

j) $3x(x + 2) = -150$

2. Calcular las siguientes potencias de i

a) $i^{42} =$

e) $i^{84} =$

b) $i^{33} =$

f) $i^{138} =$

c) $i^{105} =$

g) $i^{251} =$

d) $i^{71} =$

h) $i^{500} =$

3. Dados los siguientes números complejos realizar las sumas y restas indicadas

$Z_1 = -3 + 2i$

$Z_3 = -5 - i$

$Z_5 = 11 + 3i$

$Z_7 = \frac{1}{2} + 2i$

$Z_2 = 4 + 5i$

$Z_4 = 7 - 8i$

$Z_6 = -9 + 4i$

$Z_8 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}i$

a) $Z_1 + Z_2 =$

g) $Z_7 + Z_2 =$

b) $Z_3 + Z_4 =$

h) $Z_8 - Z_6 =$

c) $Z_5 + Z_6 =$

i) $Z_7 + Z_8 =$

d) $Z_1 - Z_2 =$

j) $Z_2 + Z_3 - Z_4 =$

e) $Z_3 - Z_4 =$

k) $Z_5 + Z_8 - Z_7 =$

f) $Z_5 - Z_6 =$

l) $Z_7 - (Z_3 + Z_1) =$

4. Hallar el resultado de las siguientes operaciones

a) $3 + 2i - (4 - 5i - 5 + i) =$

d) $-3 - 5i - (7 - 2i) + 10i =$

b) $1 - 9i + 7 - 2i - (4 + 6i) =$

e) $3i + \frac{16}{5} - \left[\frac{1}{3} + \frac{8}{5}i - \left(7 + \frac{6}{5}i\right)\right]$

c) $8 + 7i - [-9i - (4 + 3i)]$

f) $\frac{1}{2} - \frac{8}{5}i + 4i - 3 - \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5}i\right) + \frac{8}{5}i =$

“En algún lugar, alguna cosa increíble aguarda a ser descubierta”. Carl Sagan.

5. Dados los siguientes números complejos realizar las operaciones indicadas

$$Z_1 = -4 - 2i$$

$$Z_3 = -7 + 2i$$

$$Z_5 = -9i$$

$$Z_7 = 3 + \frac{1}{2}i$$

$$Z_2 = 4 + 6i$$

$$Z_4 = -1 - 8i$$

$$Z_6 = 5 + 3i$$

$$Z_8 = \frac{3}{2} - \frac{3}{5}i$$

$$a) Z_1 \cdot Z_2 =$$

$$g) Z_3 \cdot Z_1 \cdot Z_5 =$$

$$b) Z_4 \cdot Z_3 =$$

$$h) (Z_5 + Z_2) \cdot (Z_6 - Z_4) =$$

$$c) Z_5 \cdot Z_6 =$$

$$i) (Z_1 + Z_7) \cdot (Z_8 - Z_3) =$$

$$d) Z_7 \cdot Z_4 =$$

$$j) 5Z_5 - 6Z_3 =$$

$$e) Z_8 \cdot Z_5 =$$

$$k) Z_1 \cdot 3Z_2 + 4Z_4 =$$

$$f) Z_7 \cdot Z_8 =$$

$$l) 4Z_8 \cdot Z_1 - 5Z_7 \cdot Z_3 =$$

6. Dados los siguientes números complejos realizar las operaciones indicadas

$$Z_1 = -2 + 4i$$

$$Z_3 = -1 - 2i$$

$$Z_5 = 13 - 3i$$

$$Z_7 = \frac{5}{4} + 3i$$

$$Z_2 = 5 + 3i$$

$$Z_4 = 6 - 7i$$

$$Z_6 = -8 + 7i$$

$$Z_8 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{3}i$$

$$a) \frac{Z_1}{Z_2} =$$

$$g) \frac{Z_8}{Z_3} =$$

$$b) \frac{Z_3}{Z_4} =$$

$$h) \frac{Z_8}{Z_7} =$$

$$c) \frac{Z_6}{Z_5} =$$

$$i) \frac{Z_1 + Z_2}{Z_3 - Z_4} =$$

$$d) \frac{Z_5}{Z_7} =$$

$$j) \frac{Z_5 + Z_6}{4Z_7} =$$

$$e) \frac{Z_6}{Z_8} =$$

$$k) \frac{2}{Z_2} + 3Z_4 =$$

$$f) \frac{Z_7}{Z_2} =$$

$$l) -2Z_1 + \frac{Z_3}{Z_2} =$$

7. En cada caso, resolver la ecuación hallando el número complejo Z .

$$a) \frac{Z}{4+7i} = -2 + 8i$$

$$e) Z - 4i - 2Z + 7 = -4Z + 8i$$

$$b) 3Z + 5 + 3i = Z + 4i$$

$$f) 2Z - 3i - 5 = 1 - 3Z + 7i$$

$$c) Z \cdot (1 + i) = 18 + 6i$$

$$g) Z \cdot (-1 + 3i) + 3Z = 6 + 8i$$

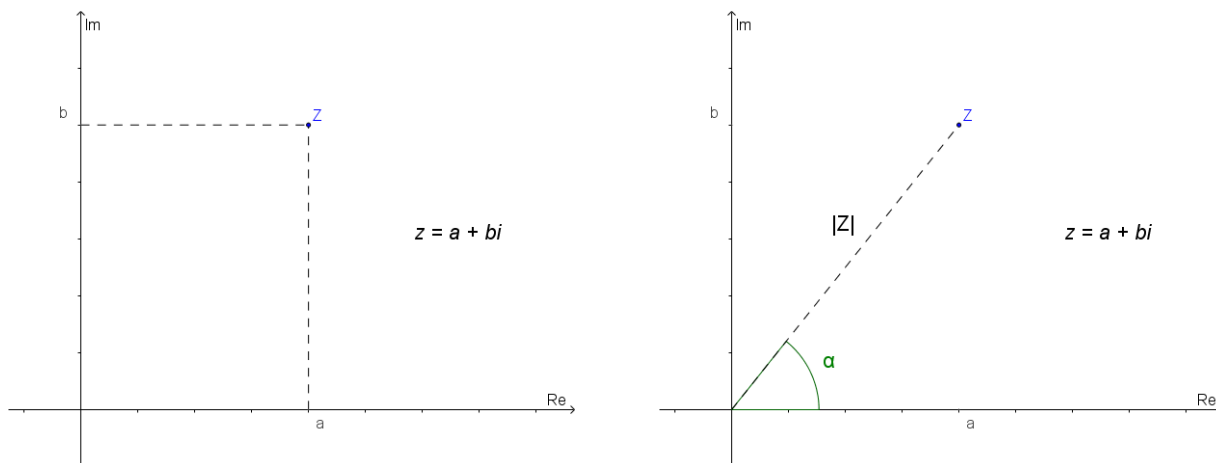
$$d) 2Z \cdot (3 + 7i) = -4 + 6i$$

$$h) 2Z \cdot (-4 + 6i) = -7 + 11i - 2Z$$

3. Números complejos en forma polar

3.1. Representación gráfica

Dado que la recta real se completa con el conjunto de números reales, los números complejos se representarán en el plano coordenado. El número complejo $Z = a + bi$ quedará representado con el punto $(a; b)$. Al eje de abscisas lo llamaremos *eje real* y al eje de ordenadas *eje imaginario*.



El punto $(a; b)$ también se puede definir por su distancia al centro de coordenadas y el ángulo que forma dicha distancia con el eje real positivo.

Al igual que con los números reales, vamos a definir la distancia del número Z al origen como el *módulo de Z* y su notación será $|Z|$ y al ángulo α lo denominaremos *argumento de Z* y lo denotaremos $\arg(Z)$.

3.2. Módulo de Z

Por ser el módulo del número Z su distancia al origen de coordenadas podemos aplicar el teorema de Pitágoras para calcularlo en función de a y b .

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3.3. Argumento de Z

Podemos calcular el argumento de Z aplicando trigonometría.

$$\arg(Z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

3.4. Pasaje de forma binómica a forma polar

Un número complejo se expresa en su forma polar cuando este se define en función de su módulo y argumento.

Notación: $Z = |Z|_{\alpha}$

Ejemplo:

Hallar la forma polar del número complejo $Z = 3 + 4i$

Módulo	Argumento
$ Z = \sqrt{3^2 + 4^2}$	$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$
$ Z = \sqrt{9 + 16}$	$\alpha = 53,13^\circ$
$ Z = \sqrt{25}$	
$ Z = 5$	

$$Z = 5_{53,13^\circ}$$

Para tener en cuenta

Como el arco tangente varía entre -90° y 90° y el $\arg(Z)$ debe estar entre 0° y 360° debemos aplicar la siguiente corrección:

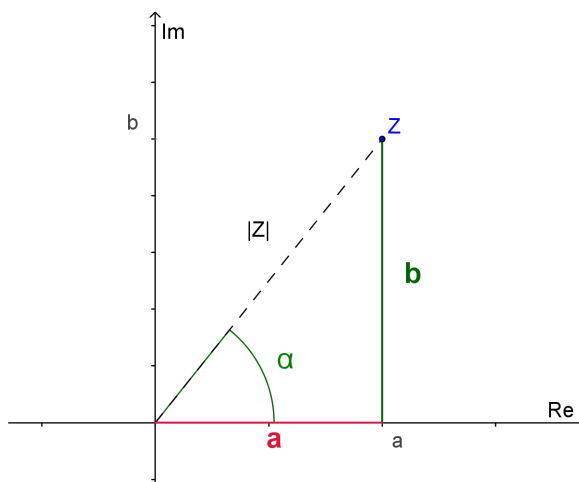
Cuadrante	Argumento
I	$\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
II y III	$\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180^\circ$
IV	$\text{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 360^\circ$

3.5. Pasaje de forma polar a forma binómica

Dado un número complejo expresado en forma polar $Z = |Z|_\alpha$ podemos expresarlo en forma binómica $Z = a + bi$ usando trigonometría.

Como se puede deducir de la imagen:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot \cos \alpha \\ \sin \alpha &= \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot \sin \alpha \\ \Rightarrow Z &= (|z| \cdot \cos \alpha) + (|z| \cdot \sin \alpha) i\end{aligned}$$



Ejemplo: Hallar la forma binómica del número complejo $Z = 8_{|60^\circ}$

Parte real	Parte imaginaria
$a = 8 \cdot \cos(60^\circ)$	$b = 8 \cdot \sen(60^\circ)$
$a = 8 \cdot 0,5$	$b = 8 \cdot 0,866$
$a = 4$	$b = 9,33$

$$Z = 4 + 9,33i$$

3.6. Operaciones en forma polar

3.6.1. Multiplicación

Sean $Z_1 = |Z_1|_\alpha$ y $Z_2 = |Z_2|_\beta$ dos números complejos expresados en forma polar, la multiplicación de ambos será otro número complejo que tendrá como módulo el producto de los módulos y como argumento la suma de los argumentos.

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2|_{\alpha+\beta}$$

En el caso que $\alpha + \beta$ resulte mayor a $360^\circ \implies \arg(Z_1 \cdot Z_2) = \alpha + \beta - 360^\circ$

Ejemplo: Sean $Z_1 = 5_{20^\circ}$ y $Z_2 = 3_{45^\circ}$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (5 \cdot 3)_{(20^\circ+45^\circ)}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = 15_{65^\circ}$$

3.6.2. División

Sean $Z_1 = |Z_1|_\alpha$ y $Z_2 = |Z_2|_\beta$ dos números complejos en forma polar, la división de ambos será otro número complejo que tendrá como módulo el cociente de los módulos y como argumento la resta de los argumentos.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|_{\alpha-\beta}}$$

En caso de que $\alpha - \beta$ resulte negativo $\arg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = \alpha - \beta + 360^\circ$

Ejemplo: Sean $Z_1 = 8_{50^\circ}$ y $Z_2 = 2_{20^\circ}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{8}{2}\right)_{(50^\circ-20^\circ)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = 4_{50^\circ}$$

3.6.3. Potenciación

Sean $Z = |Z|_{\alpha}$ un número complejo en forma polar, la potencia enésima de Z será otro número complejo cuyo módulo sea la potencia :

$$Z^n = |Z|_{(n \cdot \alpha)}^n$$

En el caso que $n \cdot \alpha$ resulte mayor a $360^\circ \cdot k$ entonces $\arg(Z^n) = n \cdot \alpha - 360^\circ \cdot k$

Ejemplo: Sea $Z = 4_{(25^\circ)}$

$$Z^3 = 4_{(3 \cdot 25^\circ)}^3$$

$$Z^3 = 64_{75^\circ}$$

3.6.4. Radicación

Sean $Z = |Z|_{\alpha}$ un número complejo en forma polar, la raíz enésima de Z será:

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|}_{\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{360^\circ}{n} \cdot k\right)} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Esto quiere decir que la raíz enésima de Z tiene n resultados distintos los cuales difieren en su argumento. Exactamente la diferencia entre los argumentos es $\frac{360^\circ}{n}$.

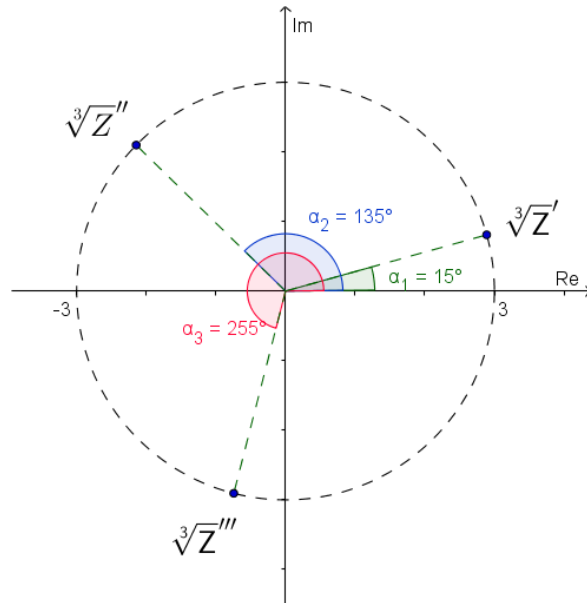
Ejemplo: Siendo $Z = 27_{45^\circ}$ vamos a calcular $\sqrt[3]{Z}$

$$\left| \sqrt[3]{Z} \right| = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\arg\left(\sqrt[3]{Z}\right) = \alpha = \frac{45^\circ}{3} + \frac{360^\circ}{3} \cdot k = 15^\circ + 120^\circ \cdot k$$

Los distintos argumentos van a ser 3 y van a estar separados por 120°

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 15^\circ + 120^\circ \cdot 0 = 15^\circ + 0^\circ = 15^\circ \\ \alpha_2 &= 15^\circ + 120^\circ \cdot 1 = 15^\circ + 120^\circ = 135^\circ \\ \alpha_3 &= 15^\circ + 120^\circ \cdot 2 = 15^\circ + 240^\circ = 255^\circ \end{aligned}$$



$$\sqrt[3]{Z} = \begin{cases} 3_{15^\circ} \\ 3_{135^\circ} \\ 3_{255^\circ} \end{cases}$$

“Educad a los niños y no será necesario castigar a los hombres”. Pitágoras.

3.7. Actividades

1. Representar los siguientes números complejos en un sistema de coordenadas cartesianas

a) $Z_1 = 3 + 5i$	e) $Z_5 = 3 + 5i$	i) $Z_9 = \frac{9}{2} - 5i$
b) $Z_2 = -4 + 2i$	f) $Z_6 = -1 - 8i$	j) $Z_{10} = -8 - \sqrt{2}i$
c) $Z_3 = -5 - 7i$	g) $Z_7 = 4 - 6i$	k) $Z_{11} = 4\sqrt{3} + 7i$
d) $Z_4 = 12 - 5i$	h) $Z_8 = 5$	l) $Z_{12} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}i$

2. Pasar los números del ejercicio anterior a forma polar

3. Pasar los siguientes números complejos a forma binómica

a) $Z_1 = 2_{ 60^\circ}$	e) $Z_5 = 12_{ 210^\circ}$	i) $Z_9 = \sqrt{3}_{ 120^\circ}$
b) $Z_2 = 5_{ 45^\circ}$	f) $Z_6 = 5_{ 315^\circ}$	j) $Z_{10} = 2\sqrt{5}_{ 300^\circ}$
c) $Z_3 = 8_{ 30^\circ}$	g) $Z_7 = 1_{ 270^\circ}$	k) $Z_{11} = \sqrt{2}_{ 45^\circ}$
d) $Z_4 = 9_{ 150^\circ}$	h) $Z_8 = 4_{ 0^\circ}$	l) $Z_{12} = \frac{4}{3}_{ 180^\circ}$

4. Dados los siguientes números complejos en forma polar, realizar las operaciones indicadas

$Z_1 = 8_{ 160^\circ}$	$Z_3 = 10_{ 340^\circ}$	$Z_5 = 4_{ 315^\circ}$
$Z_2 = 2_{ 280^\circ}$	$Z_4 = 5_{ 160^\circ}$	$Z_6 = 3_{ 45^\circ}$
a) $Z_1 \cdot Z_2$	d) $Z_2 \cdot Z_5$	g) $\frac{Z_5}{Z_6}$
b) $Z_3 \cdot Z_4$	e) $\frac{Z_1}{Z_2}$	h) $\frac{Z_3}{Z_2}$
c) $Z_5 \cdot Z_6$	f) $\frac{Z_3}{Z_4}$	i) $(Z_2)^3$
		j) $(Z_4)^2$
		k) $(Z_6)^4$
		l) $(Z_5)^5$

5. Dados los siguientes números complejos en forma polar, calculas las raíces indicadas

$Z_1 = 8_{ 300^\circ}$	$Z_3 = 81_{ 40^\circ}$	$Z_5 = 16_{ 140^\circ}$
$Z_2 = 64_{ 130^\circ}$	$Z_4 = 27_{ 210^\circ}$	$Z_6 = 32_{ 220^\circ}$
a) $\sqrt[3]{Z_1}$	c) $\sqrt[4]{Z_3}$	e) $\sqrt[4]{Z_5}$
b) $\sqrt{Z_2}$	d) $\sqrt[3]{Z_4}$	f) $\sqrt[5]{Z_6}$
		g) $\sqrt[3]{Z_2}$
		h) $\sqrt{Z_3}$

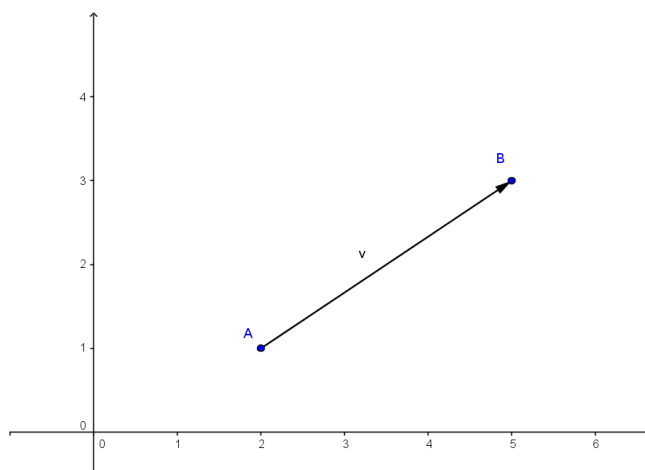
4. Vectores

4.1. Definición

Un vector es un *segmento orientado*, o sea, un tramo de recta el cual tendrá un origen y un extremo. Los vectores permiten representar magnitudes físicas dotadas no sólo de intensidad, sino también de dirección, como es el caso de la fuerza, la velocidad, o la aceleración.

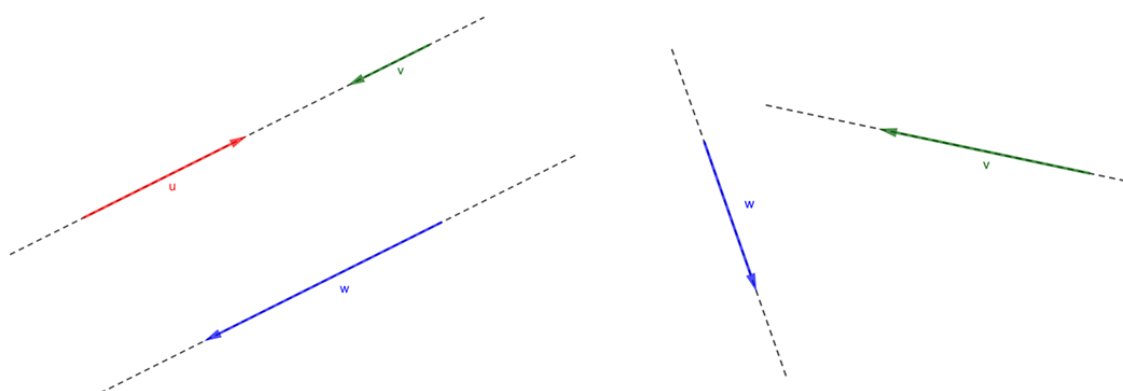
Definición formal: dados dos puntos del plano A y B , llamaremos vector v y lo designaremos como $\vec{v}$ al segmento orientado con origen en A y extremo en B . Simbólicamente:

$$\vec{v} = \vec{AB}$$



4.2. Elementos de un vector

Dirección: Está determinada por la recta que contiene al vector. Vectores pertenecientes a una misma recta o a rectas paralelas tienen la misma dirección.



Misma dirección

Direcciones diferentes

Sentido: En cada dirección existen dos sentidos. (EJ: El sentido puede ser de A hacia B o de B hacia A)

Módulo: Es la longitud del vector. (La distancia entre A y B). Notación: $|Z|$

4.3. Vectores particulares

Vector nulo: Es el vector de módulo cero. El vector nulo no tiene dirección ni sentido.
Notación: $\vec{0}$

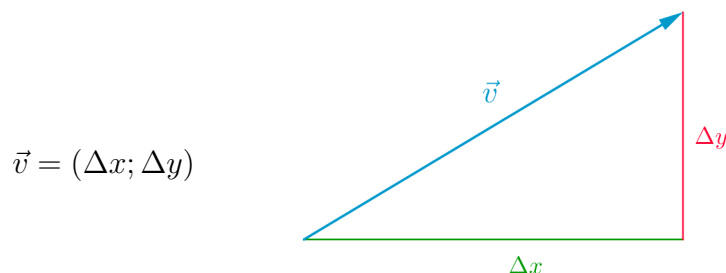
Vector unitario o versor: Es un vector de módulo uno. Notación: $\hat{v}$

Vectores equivalentes: Dos vectores son equivalentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Vectores opuestos: Dos vectores son opuestos si tienen el mismo módulo y dirección, pero sentidos diferentes.

4.4. Coordenadas de un vector

Las coordenadas de un vector serán la manera de expresar éste con números. En este curso trabajaremos con vectores del plano, por lo cual sus coordenadas serán pares ordenados. Las coordenadas expresarán el desplazamiento del vector. El primer elemento del par ordenado representa el desplazamiento horizontal y el segundo el vertical.



Estas coordenadas se pueden obtener restando a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen. Este vector se conoce como representante de la familia de vectores equivalentes.

Sean $A = (x_A; y_A)$, $B = (x_B; y_B)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

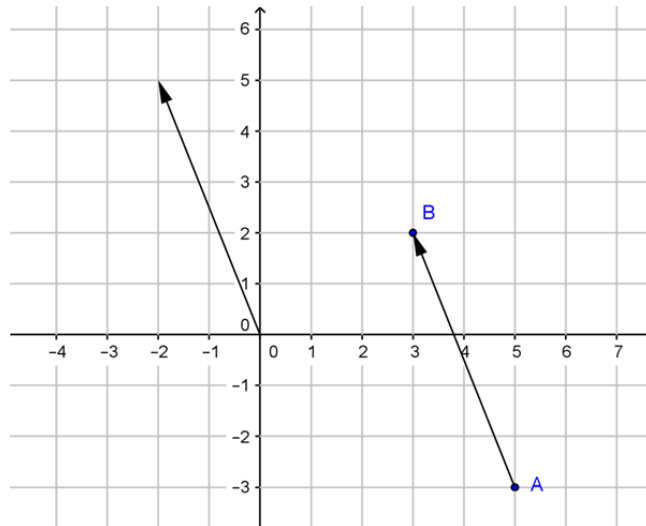
Ejemplo

Sean $A = (5; -3)$, $B = (3; 2)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v} = (3 - 5; 2 - (-3))$$

$$\vec{v} = (3 - 5; 2 + 3)$$

$$\vec{v} = (-2; 5)$$



4.5. Módulo

Como vimos el módulo de un vector es su longitud. Por lo cual podemos usar el teorema de Pitágoras para calcularlo a partir de sus coordenadas.

Dado el vector $\vec{v} = (x_v; y_v)$ su módulo será:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_v)^2 + (y_v)^2}$$

Ejemplo

Calculemos el módulo del vector $\vec{v} = (-2; 5)$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 25}$$

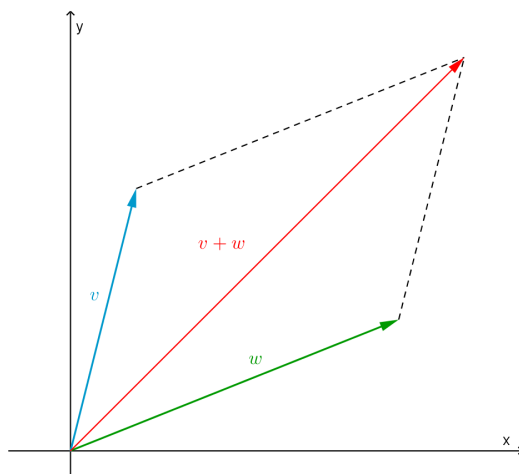
$$|\vec{v}| = \sqrt{29} \cong 5,38$$

4.6. Suma de vectores

Dados dos vectores $\vec{v} = (x_v; y_v)$ y $\vec{w} = (x_w; y_w)$ la suma de ambos será el vector:

$$\overrightarrow{v+w} = (x_v + x_w; y_v + y_w)$$

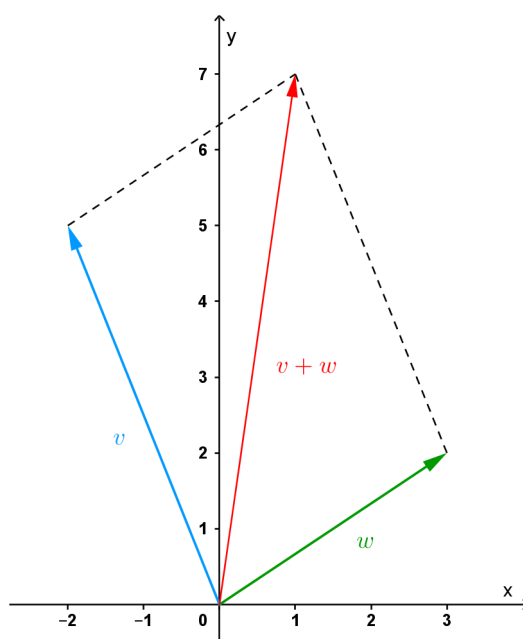
Geométricamente el vector suma es la diagonal del paralelogramo que tiene por lados a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$



Ejemplo

Sumemos los vectores $\vec{v} = (-2; 5)$ y $\vec{w} = (3; 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v+w} &= (-2+3; 5+2) \\ \overrightarrow{v+w} &= (1; 7)\end{aligned}$$



4.7. Multiplicación de un escalar por un vector

Dado un escalar k y un vector $\vec{v} = (x_v; y_v)$ la multiplicación de ambos será el vector:

$$k\vec{v} = k(x_v; y_v) = (kx_v; ky_v)$$

Geométricamente el producto de un escalar por un vector es otro vector con la misma dirección, con el mismo sentido si k es positivo ($k > 0$) o sentido contrario si k es negativo ($k < 0$) y su módulo es el producto del valor absoluto de k por el modulo de $\vec{v}$.

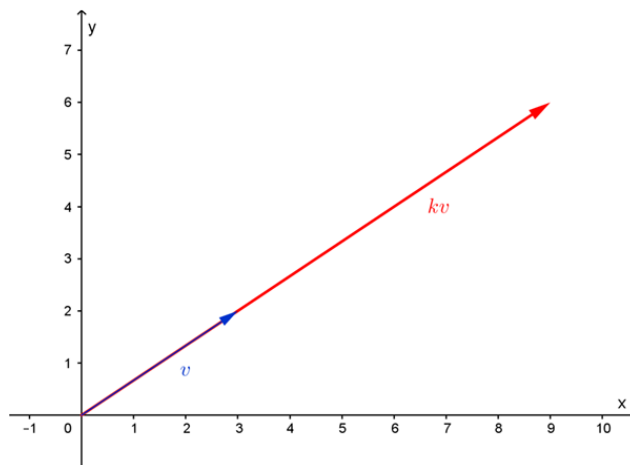
Ejemplo

Sean $k = 3$ y $\vec{w} = (3; 2)$

$$k\vec{w} = 3(3; 2)$$

$$k\vec{w} = (3 \cdot 3; 3 \cdot 2)$$

$$k\vec{w} = (9; 6)$$



4.8. Vector unitario

Podemos calcular el vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ dividiéndolo por su módulo.

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Ejemplo

Calculemos el vector unitario de $\vec{v} = (-2; 5)$: Recordemos que ya calculamos su módulo y es $|\vec{v}| = \sqrt{29}$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Rightarrow \hat{v} = \frac{(-2; 5)}{\sqrt{29}} \Rightarrow \hat{v} = \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}; \frac{5}{\sqrt{29}} \right)$$

4.9. Producto escalar entre dos vectores

Sean $\vec{v} = (x_v; y_v)$ y $\vec{w} = (x_w; y_w)$ dos vectores, el producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$ será:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_v \cdot x_w + y_v \cdot y_w$$

Como se puede apreciar el resultado del producto escalar entre vectores es un número real.

Ejemplo

Calculamos el producto escalar entre los vectores $\vec{v} = (-2; 5)$ y $\vec{w} = (3; 2)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -2 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = -6 + 10$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 4$$

Otra forma de calcular el producto escalar

El producto escalar también se puede calcular como el producto de los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\alpha)$$

De la anterior expresión podemos deducir que el producto escalar entre dos vectores perpendiculares es cero.

4.9.1. Ángulo entre dos vectores

El producto escalar nos permite calcular el ángulo entre dos vectores a partir de sus coordenadas.

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Ejemplo

Vamos a calcular el ángulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ del ejemplo anterior

Producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4$

Módulo de $\vec{v} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

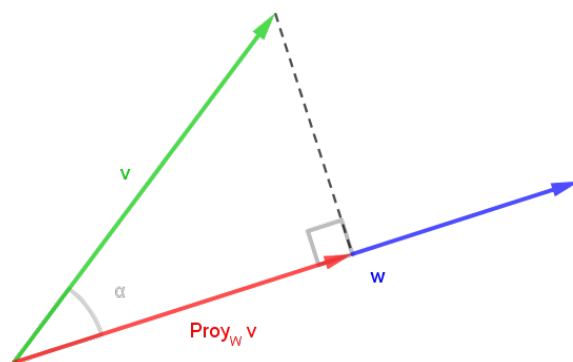
Módulo de $\vec{w} \Rightarrow |\vec{w}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

Remplazando en la fórmula anterior nos queda:

$$\alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = 78,11^\circ$$

4.9.2. Proyección de un vector sobre otro

La proyección de un vector sobre otro es la "sombra" que proyecta uno sobre el otro.



Proyección escalar

La proyección escalar del vector $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ es la longitud de la "sombra" que este proyecta sobre dicho vector. Aplicando trigonometría podemos ver que:

$$|Proy_w v| = |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

Remplazamos el $\cos(\alpha)$ usando el producto escalar

$$|Proy_w v| = |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

simplificando

$$|Proy_w v| = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|}$$

Ejemplo

Calculemos la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{w}$.

Recordemos que: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 4$ y $|\vec{w}| = \sqrt{13}$

$$|Proy_w v| = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \implies |Proy_w v| = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

Proyección vectorial

Si multiplicamos la proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ por el vector unitario en la dirección de este último tendremos la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$

$$Proy_w v = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$$

o bien:

$$Proy_w v = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \cdot \vec{w}$$

Ejemplo

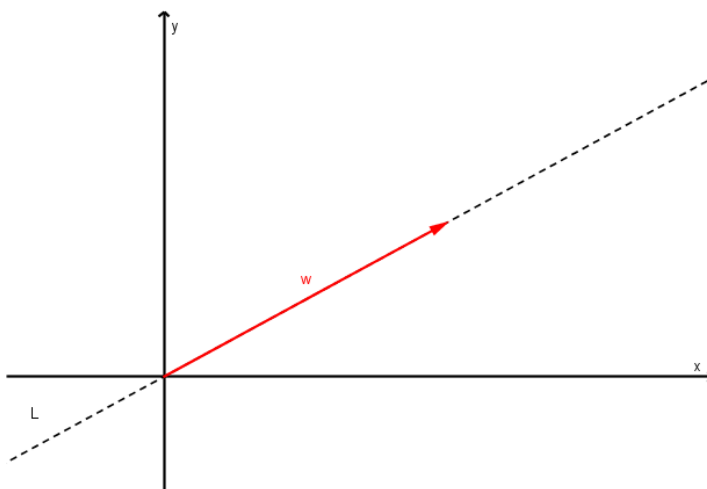
Continuando con el ejemplo anterior, la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ será:

$$Proy_w v = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \implies Proj_w v = \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{(2; 3)}{\sqrt{13}} = \frac{4}{13} \cdot (2; 3) = \left(\frac{8}{13}; \frac{12}{13} \right)$$

4.10. Ecuación vectorial de la recta

La ecuación vectorial de la recta L que pasa por el origen de coordenadas, con dirección del vector $\vec{w}$ es:

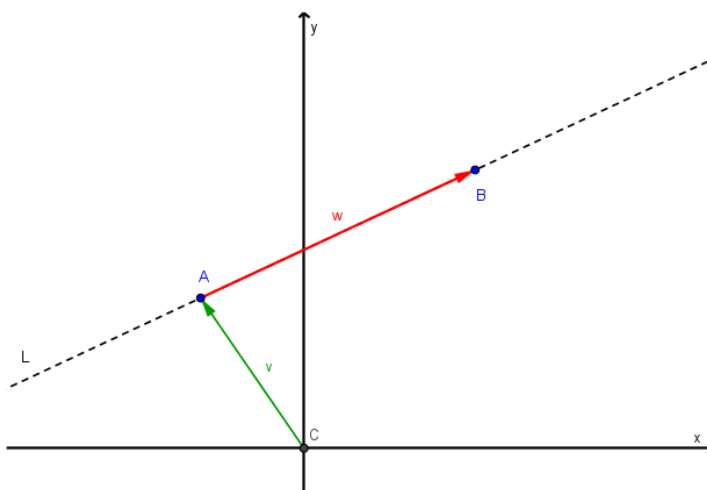
$$L : (x; y) = k\vec{w} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$



La ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos A y B es:

$$L : (x; y) = \vec{v} + k\vec{w}$$

$$\text{con } \vec{v} = \overrightarrow{OA}, \vec{w} = \overrightarrow{AB} \text{ y } k \in \mathbb{R}$$



A $\vec{v}$ lo llamaremos vector posición (señala un punto que pertenece a la recta), $\vec{w}$ es el vector director (indica la dirección de la recta) y k es un escalar.

Ejemplo:

Sean $A = (3; 1)$ y $B = (-2; 4)$, hallar la ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos A y B .

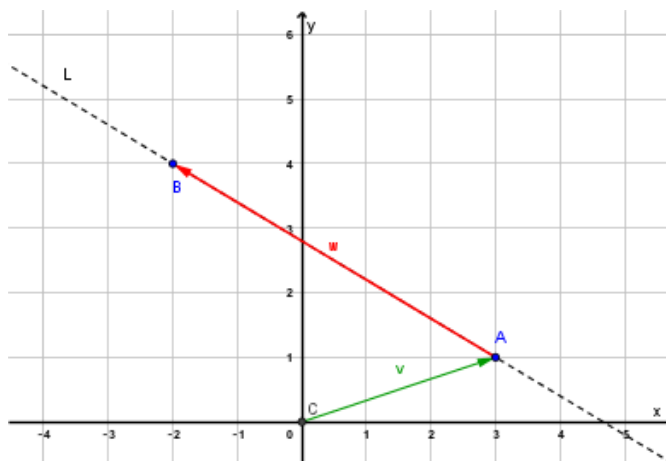
Calculamos las coordenadas de los vectores:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \vec{v} = (3; 1)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{w} = (-2 - 3; 4 - 1) \Rightarrow \vec{w} = (-5; 3)$$

Remplazamos en la ecuación:

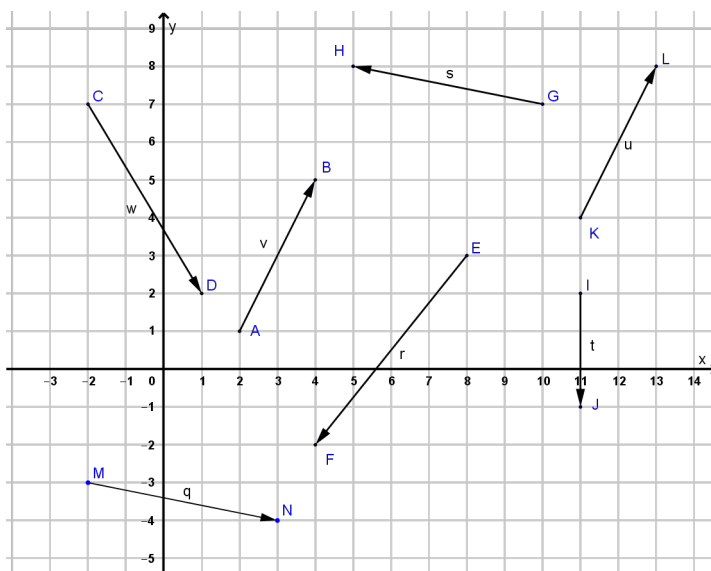
$$L : (x; y) = (3; 1) + k(-5; 3)$$



“Encuentro la televisión muy educativa. Cada vez que alguien la enciende, me retiro a otra habitación y leo un libro.” Groucho Marx.

4.11. Actividades

1. Graficar los siguientes vectores
 - a) Dos vectores que tengan distintas direcciones
 - b) Dos vectores que tengan la misma dirección y sentido.
 - c) Dos vectores que tengan igual dirección, pero distinto sentido
 - d) Dos vectores equivalentes.
 - e) Dos vectores opuestos.
2. Completar las coordenadas de los vectores de la siguiente gráfica y luego responder las preguntas



$$\vec{q} = (\quad ; \quad)$$

$$\vec{r} = (\quad ; \quad)$$

$$\vec{s} = (\quad ; \quad)$$

$$\vec{t} = (\quad ; \quad)$$

$$\vec{u} = (\quad ; \quad)$$

$$\vec{v} = (\quad ; \quad)$$

$$\vec{w} = (\quad ; \quad)$$

- a) ¿Cuáles de los vectores del gráfico son equivalentes? ¿Cómo son sus coordenadas entre sí?
 - b) ¿Cuáles de los vectores del gráfico son opuestos? ¿Cómo son sus coordenadas entre sí?
3. Dados los siguientes puntos hallar las coordenadas de los vectores indicados

$$A = (3; 2)$$

$$C = (-1; 3)$$

$$E = (2; -5)$$

$$B = (8; -1)$$

$$D = (3; 5)$$

$$F = (-2; -8)$$

$$a) \vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

$$c) \vec{r} = \overrightarrow{EF}$$

$$e) \vec{t} = \overrightarrow{DE}$$

$$b) \vec{w} = \overrightarrow{CD}$$

$$d) \vec{s} = \overrightarrow{BC}$$

$$f) \vec{u} = \overrightarrow{FA}$$

“Sacas lo mejor de los demás cuando das lo mejor de ti”. Harvey Samuel Firestone.

4. Calcular el módulo de los siguientes vectores

$$\vec{v} = (4; 6)$$

$$\vec{w} = (-2; 4)$$

$$\vec{r} = (3; -5)$$

$$\vec{t} = (-6; -7)$$

$$\vec{s} = (5; -3)$$

$$\vec{u} = (-6; 4)$$

5. Realizar las siguientes sumas de vectores y graficar cada suma en un sistema de coordenadas

$$a) \vec{v} + \vec{w} =$$

$$c) \vec{t} + \vec{u} =$$

$$e) \vec{w} + \vec{s} =$$

$$b) \vec{r} + \vec{s} =$$

$$d) \vec{v} + \vec{t} =$$

$$f) \vec{u} + \vec{r} =$$

6. Realizar las siguientes operaciones entre vectores

$$a) 2\vec{v} + 3\vec{w} =$$

$$c) -5\vec{t} + 2\vec{u} =$$

$$b) 2(\vec{r} - \vec{s}) =$$

$$d) -2(\vec{v} + \vec{t}) =$$

7. Calcular los vectores unitarios en las direcciones de los vectores del punto 4.

8. Teniendo en cuenta los vectores del punto 4 calcular el producto escalar entre ellos como se indica

$$a) \vec{v} \cdot \vec{w} =$$

$$c) \vec{t} \cdot \vec{u} =$$

$$e) \vec{w} \cdot \vec{s} =$$

$$b) \vec{r} \cdot \vec{s} =$$

$$d) \vec{v} \cdot \vec{t} =$$

$$f) \vec{u} \cdot \vec{r} =$$

9. Calcular el ángulo entre los siguientes pares de vectores

$$a) \vec{v} \text{ y } \vec{w}$$

$$c) \vec{t} \text{ y } \vec{u}$$

$$e) \vec{w} \text{ y } \vec{s}$$

$$b) \vec{r} \text{ y } \vec{s}$$

$$d) \vec{v} \text{ y } \vec{t}$$

$$f) \vec{u} \text{ y } \vec{r}$$

10. Calcular las siguientes proyecciones escalares

$$a) |\text{Proy}_w v| =$$

$$c) |\text{Proy}_t u| =$$

$$e) |\text{Proy}_w s| =$$

$$b) |\text{Proy}_r s| =$$

$$d) |\text{Proy}_v t| =$$

$$f) |\text{Proy}_u r| =$$

11. Calcular las siguientes proyecciones vectoriales

$$a) \text{Proy}_w v =$$

$$c) \text{Proy}_t u =$$

$$e) \text{Proy}_w s =$$

$$b) \text{Proy}_r s =$$

$$d) \text{Proy}_v t =$$

$$f) \text{Proy}_u r =$$

12. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el siguiente par de puntos. Graficar cada recta y los vectores en un sistema de coordenadas

$$a) A = (1; 3)$$

$$B = (3; 7)$$

$$b) A = (2; 4)$$

$$B = (-1; 6)$$

$$c) A = (-7; 2)$$

$$B = (-4; -1)$$

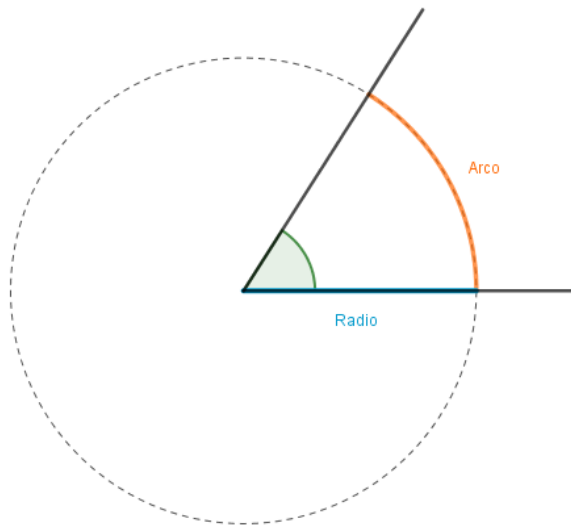
$$d) A = (-2; -2)$$

$$B = (-8; 2)$$

5. Funciones trigonométricas

5.1. Sistema circular

En el sistema circular la medida de un ángulo se expresa como el cociente (división) entre el arco de circunferencia que determina dicho ángulo y el radio de la circunferencia. Este cociente será entonces la medida del ángulo expresada en **radianes**. Un ángulo de 1 radián será aquel donde el arco de circunferencia sea igual al radio.



Ángulo de giro completo

Veamos cual es la medida en radianes de un ángulo de giro completo. El ángulo α expresado en radianes será:

$$\alpha = \frac{A}{R} \text{ (siendo A el arco y R el radio)}$$

Como el arco en este caso coincide con la circunferencia entonces:

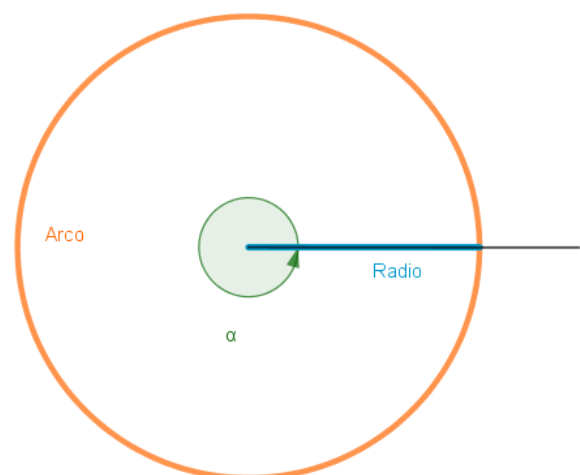
$$A = 2\pi \cdot R$$

Luego:

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot R}{R}$$

Simplificando R:

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} = 2\pi$$



Pasaje de grados a radianes

Usando regla de 3 simple podemos pasar cualquier ángulo expresado en grados a radianes.

Ejemplo: Pasaremos el ángulo $\alpha = 75^\circ$ a radianes

$$\begin{array}{l} 180^\circ \text{ — } \pi \\ 75^\circ \text{ — } \alpha = \frac{75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{5}{12} \pi \end{array}$$

Pasaje de radianes a grados

Del mismo modo podemos pasar ángulos expresados en radianes a grados.

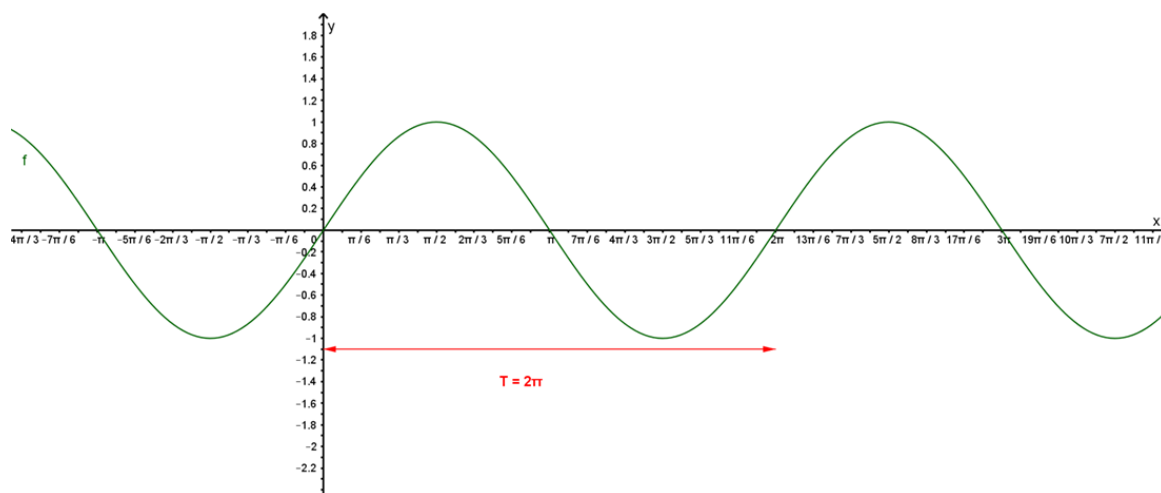
Ejemplo: Pasaremos el ángulo $\alpha = \frac{9}{4}\pi$ a grados

$$\begin{array}{l} \pi \text{ — } 180^\circ \\ \frac{9}{4}\pi \text{ — } \alpha = \frac{9}{4}\pi \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 405^\circ \end{array}$$

5.2. Función seno

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \text{Sen}(x)$ devuelve para cada elemento del dominio su seno. Al ser $\mathbb{R}$ el dominio de la función debemos trabajar con el sistema circular de medición de ángulos y por una cuestión de practicidad manejándonos en fracciones de π .

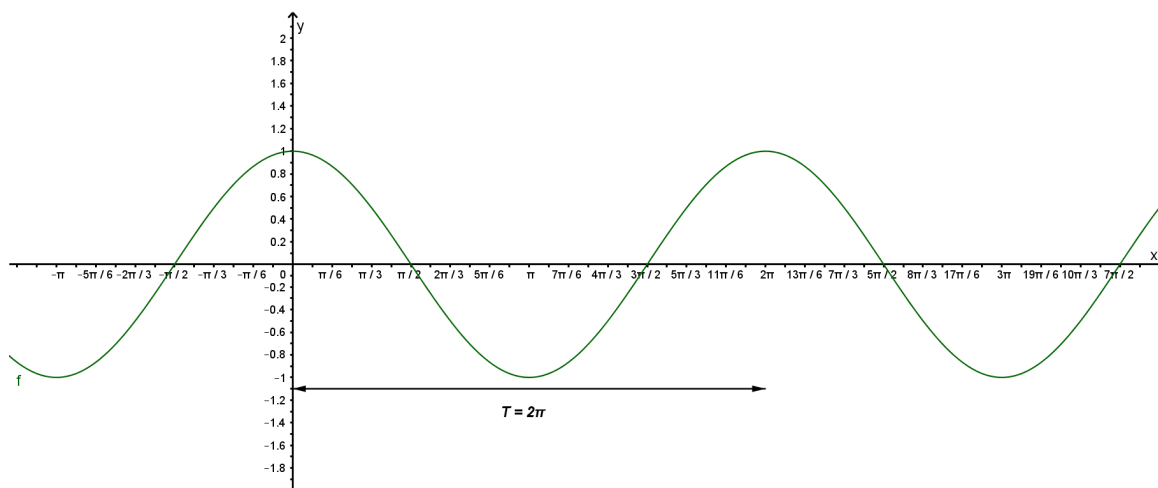
La función seno es periódica, pues se cumple que $f(x+2\pi) = f(x)$ para todo x perteneciente al dominio. Dicho de manera más sencilla, los valores obtenidos se repiten periódicamente cada 2π . El periodo se indica con la letra T . En este caso particular $T = 2\pi$. La gráfica de la función seno es una curva llamada senoide.



5.3. Función coseno

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \cos(x)$ devuelve para cada elemento del dominio su coseno.

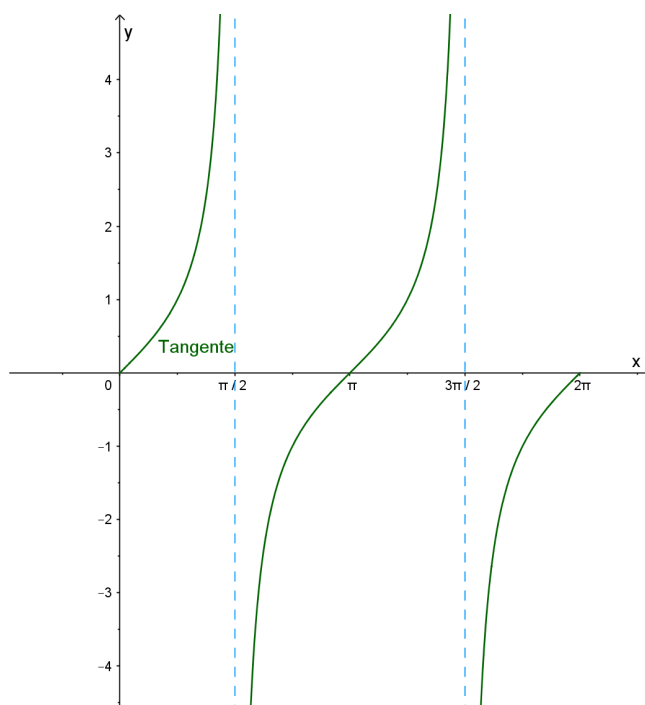
La función coseno, al igual que la función seno, es periódica con $T = 2\pi$. La gráfica de la función coseno es una curva llamada cosinusoide.



5.4. Función tangente

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/f(x) = \tan(x)$ devuelve para cada elemento del dominio su tangente. Como la tangente no está definida para todos los ángulos, su dominio será:

$$\text{Dom } f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k-1)\pi}{2} \right\} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



5.5. Coeficientes de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas pueden estar modificadas por diferentes coeficientes. Las siguientes son las expresiones más generales de dichas funciones:

$$f(x) = A \cdot \text{sen}[\omega(x - \alpha)] + c$$

$$f(x) = A \cdot \text{cos}[\omega(x - \alpha)] + c$$

$$f(x) = A \cdot \text{tan}[\omega(x - \alpha)] + c$$

Donde A, ω, α y c corresponden a la amplitud, pulsación, ángulo de fase inicial y desplazamiento vertical, en ese orden.

Amplitud

La amplitud determina la altura de la senoide. La distancia entre el máximo y el mínimo es $2A$.

Pulsación

La pulsación determina cuantos ciclos existirán en una distancia de 2π . Por lo tanto, el periodo T se puede calcular con la siguiente fórmula:

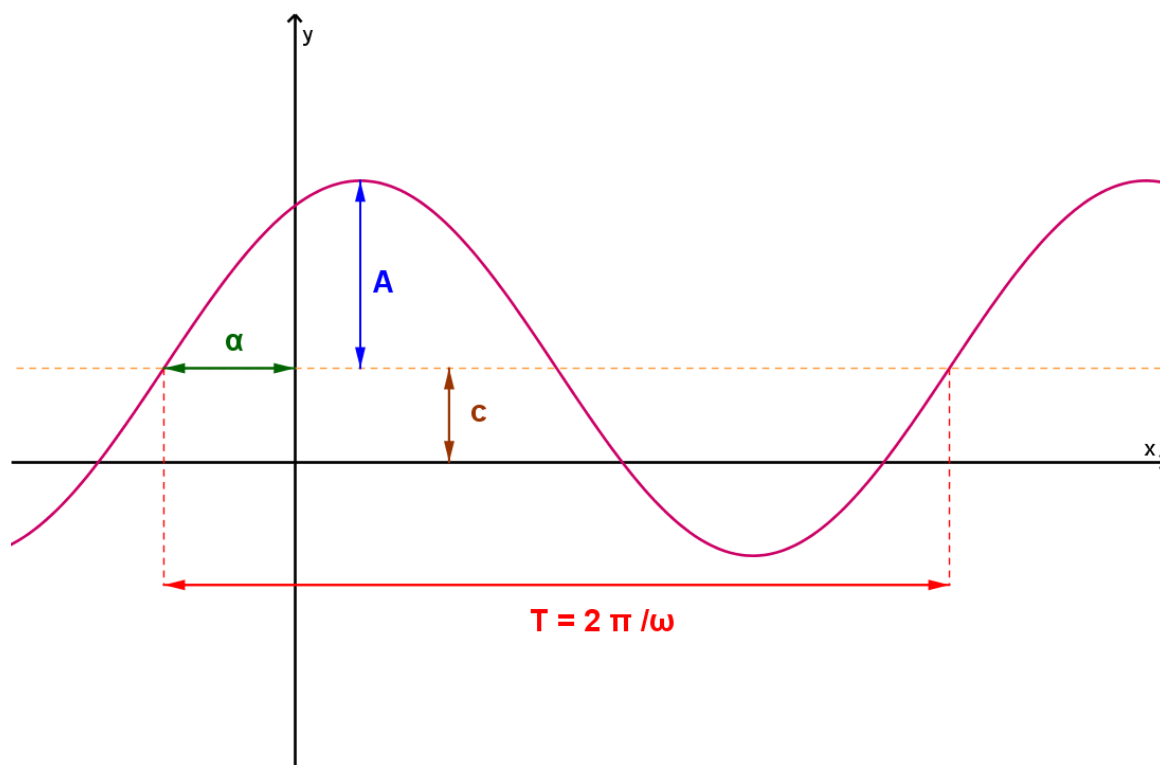
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ángulo de fase inicial

Este coeficiente determina el valor de x donde comienza un ciclo.

Desplazamiento vertical

Como su nombre lo indica este valor desplaza hacia arriba o hacia abajo la senoide.



5.6. Como graficar la función seno

Vamos a graficar la función

$$f(x) = 3\text{sen}\left[2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 1$$

- Recordando que la fórmula general es: $f(x) = A \cdot \text{sen}[\omega(x - \alpha)] + c$ identificamos los coeficientes.

$$A = 3 \quad \omega = 2 \quad \alpha = -\frac{\pi}{4} \quad c = -1$$

- Calculamos el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

- El primer ciclo comienza en $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, si a este valor le sumamos el periodo tendremos donde termina el primer ciclo:

$$x_{\text{final}} = \alpha + T \longrightarrow x_{\text{final}} = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

- Para determinar el máximo y el mínimo debemos sumarle y restarle la amplitud al desplazamiento vertical:

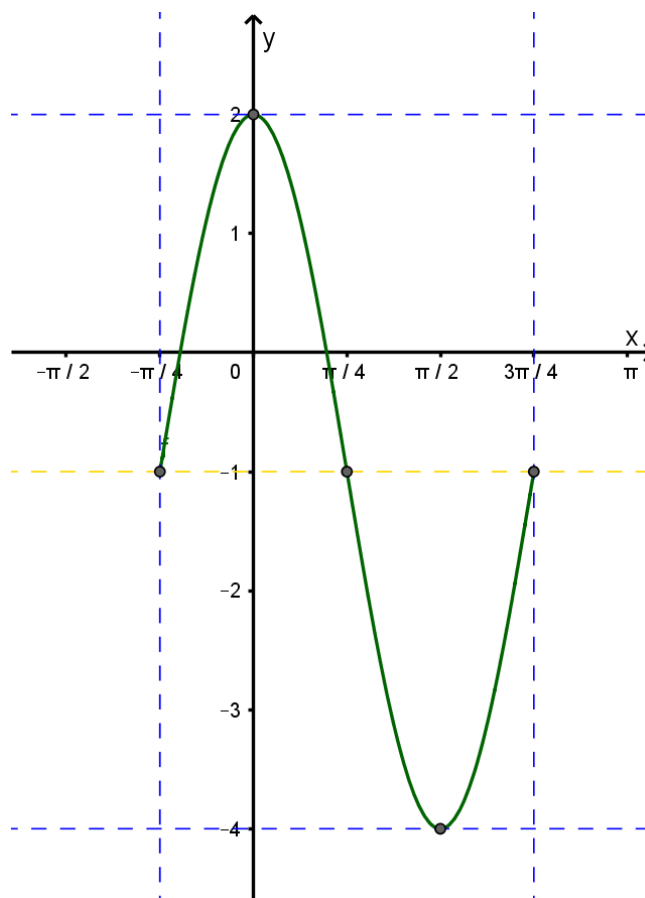
$$y_{\text{max}} = c + A \longrightarrow y_{\text{max}} = -1 + 3 = 2$$

$$y_{\text{min}} = c - A \longrightarrow y_{\text{min}} = -1 - 3 = -4$$

- Con los datos anteriores determinamos un área rectangular en el sistema de coordenadas donde dibujaremos la senoide.

- Dividimos horizontalmente el rectángulo en 4 partes y marcamos los puntos de inicio, final, punto medio, máximo y mínimo.

- Por último, dibujamos la curva.



“Un sistema escolar que no tenga a los padres como cimienta es igual que una cubeta con un agujero en el fondo.” Jesse Jackson.

5.7. Actividades

Sistema circular

1. Pasar los siguientes ángulos de grados a radianes

a) 45°

c) 120°

e) 720°

b) 90°

d) 270°

f) 315°

2. Pasar los siguientes ángulos de radianes a grados

a) 3π

c) $\frac{2}{3}\pi$

e) $\frac{\pi}{6}$

b) 1

d) $\frac{3}{4}\pi$

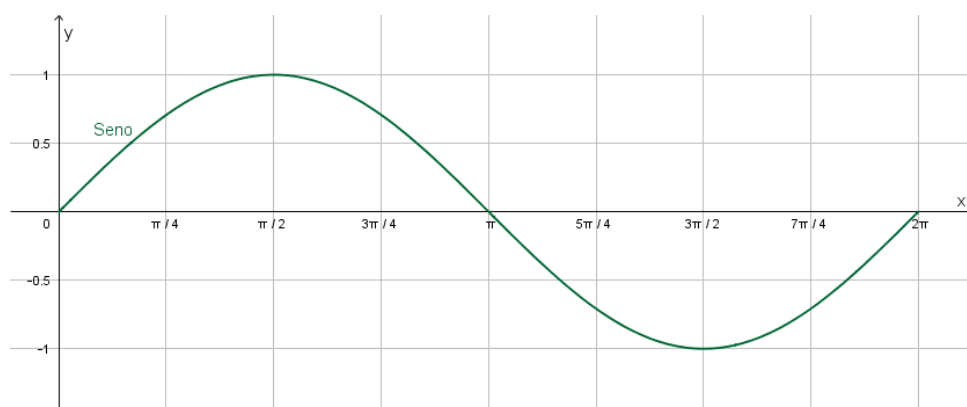
f) $\frac{2}{5}\pi$

3. Completar el siguiente cuadro de equivalencias

Radianes		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$		π
Grados	0			60	90			150	

Radianes	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$			$\frac{7}{4}\pi$		2π
Grados		225		270	300		330	

4. Teniendo como referencia la función $f(x) = \text{sen}(x)$ graficada debajo, representar gráficamente las siguientes funciones



a) $f(x) = 2\text{sen}(x)$

c) $f(x) = \text{sen}(x - \frac{\pi}{2})$

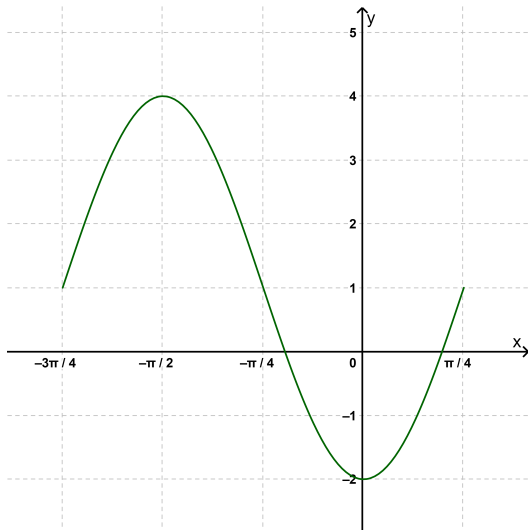
b) $f(x) = \text{sen}(2x)$

d) $f(x) = \text{sen}(x) + 1$

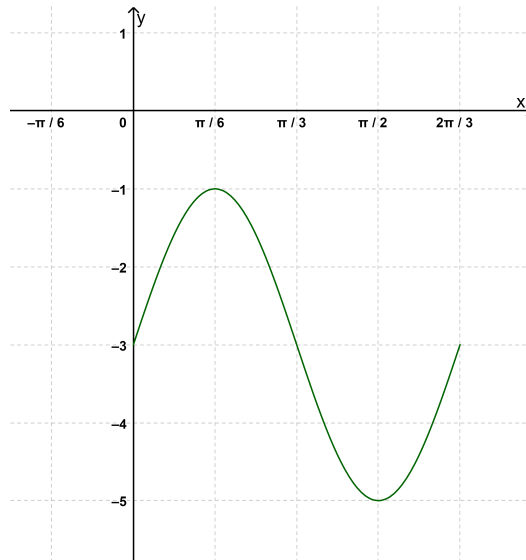
“La violencia es el último refugio del incompetente”. Isaac Asimov.

5. Identificar los coeficientes y hallar las fórmulas de las siguientes funciones

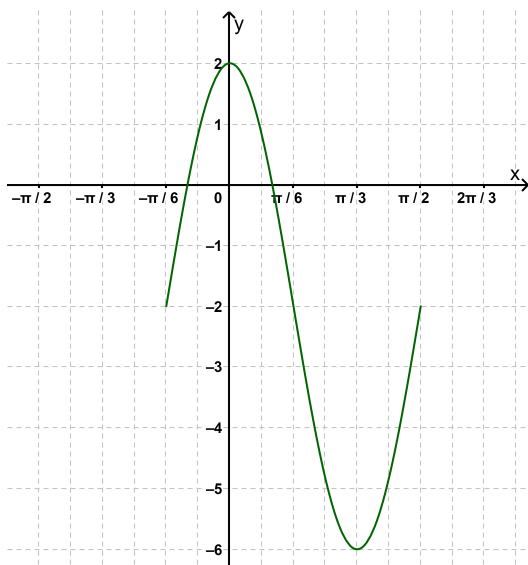
a)



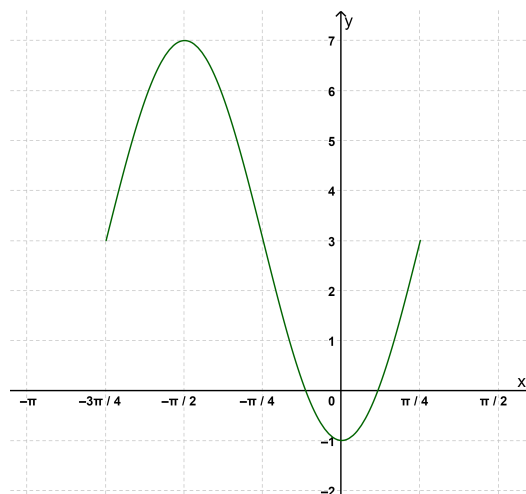
c)



b)



d)



6. Graficar las siguientes funciones seno

a) $f(x) = \text{sen}(2x) - 1$

b) $f(x) = 3\text{sen}(x) + 2$

c) $f(x) = 4\text{sen}(x - \frac{\pi}{4})$

d) $f(x) = \text{sen}[2(x + \frac{\pi}{2})]$

e) $f(x) = 2\text{sen}(3x) + 3$

f) $f(x) = 3\text{sen}[2(x + \frac{\pi}{4})] + 2$

6. Límites

6.1. Concepto de límite

Dada una función f y un valor x_0 , diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L , si al aproximarse x al valor x_0 , $f(x)$ se aproxima a L . En símbolos:

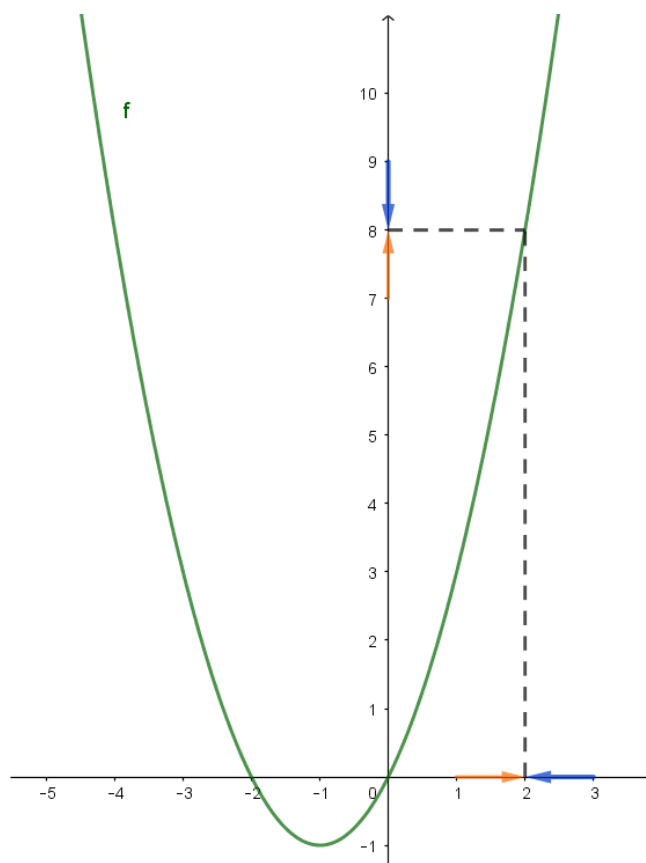
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Ejemplo 1:

Consideremos la función $f(x) = x^2 + 2x$ y $x_0 = 2$ y veamos que sucede cuando x toma valores cada vez más cercanos a 2, tanto menores como mayores.

x	1,99	1,999	1,999		2		2,0001	2,001	2,01
$f(x)$	7,9401	7,994	7,9994		8		8,0006	8,006	8,0601

Como se puede ver en la tabla, cuando x tiende a 2, $f(x)$ tiende a 8. Esto también se puede apreciar en la siguiente gráfica.



Podemos concluir que *el límite de $x^2 + 2x$, cuando x tiende a 2, es 8.*

En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x) = 8$$

Ejemplo 2:

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ que, como sabemos no está definida para $x = 2$; veamos que sucede en las proximidades de 2.

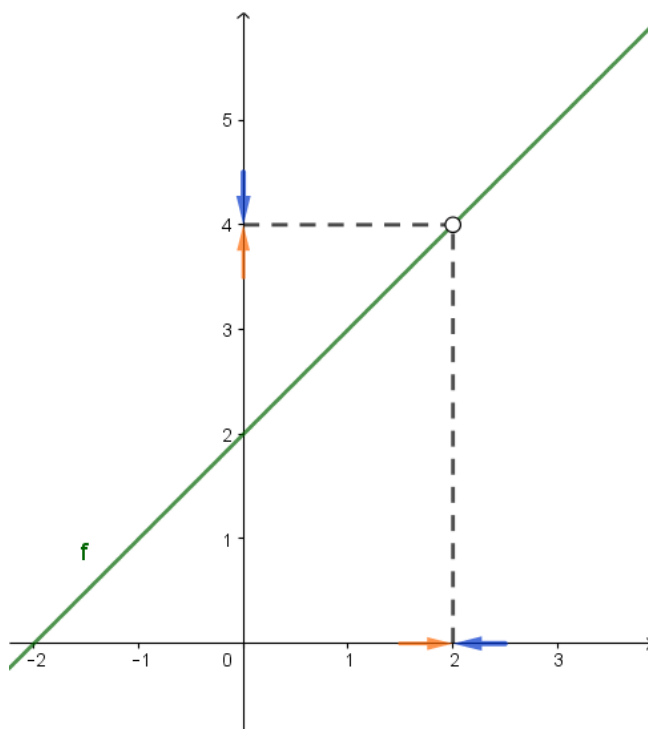
Analicemos la siguiente tabla:

x	1,99	1,999	1,999		2		2,0001	2,001	2,01
$f(x)$	3,99	3,999	3,999				4,0001	4,001	4,01

Como se ve la función tiende a 4 cuando x tiende a 2. Es decir: el límite de $\frac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 2 es 4.

En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

**6.2. Límite en un punto**

Para calcular un límite de una función en un punto, lo que haremos es remplazar (siempre que sea posible) la variable por el valor al que tiende el límite.

Ejemplo 1:

Calculemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) =$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3}(2x + 1) &= 2 \cdot 3 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3}(2x + 1) &= 6 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3}(2x + 1) &= 7\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Ahora calculemos el límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2}(3x^2 - 2x + 1) =$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2}(3x^2 - 4x + 1) &= 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2}(3x^2 - 4x + 1) &= 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2}(3x^2 - 4x + 1) &= 12 - 8 + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2}(3x^2 - 4x + 1) &= 5\end{aligned}$$

Ejemplo 3:

Por último calcularemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1}(2^x + 1) =$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1}(2^x + 1) &= 2^{(-1)} + 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1}(2^x + 1) &= \frac{1}{2} + 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1}(2^x + 1) &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

6.3. Límites laterales

Dada una función f y un valor x_0 , diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la izquierda es M , si al aproximarse x a x_0 por valores menores, $f(x)$ se aproxima a M .

En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = M$$

Del mismo modo diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 por la derecha es N , si al aproximarse x a x_0 por valores mayores, $f(x)$ se aproxima a N .

En símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = N$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe si y solo si los límites laterales existen y son iguales.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

Dada la función definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

calcularemos los laterales en $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1^2 + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Como los límites laterales son diferentes entonces el límite en el punto no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \nexists$$

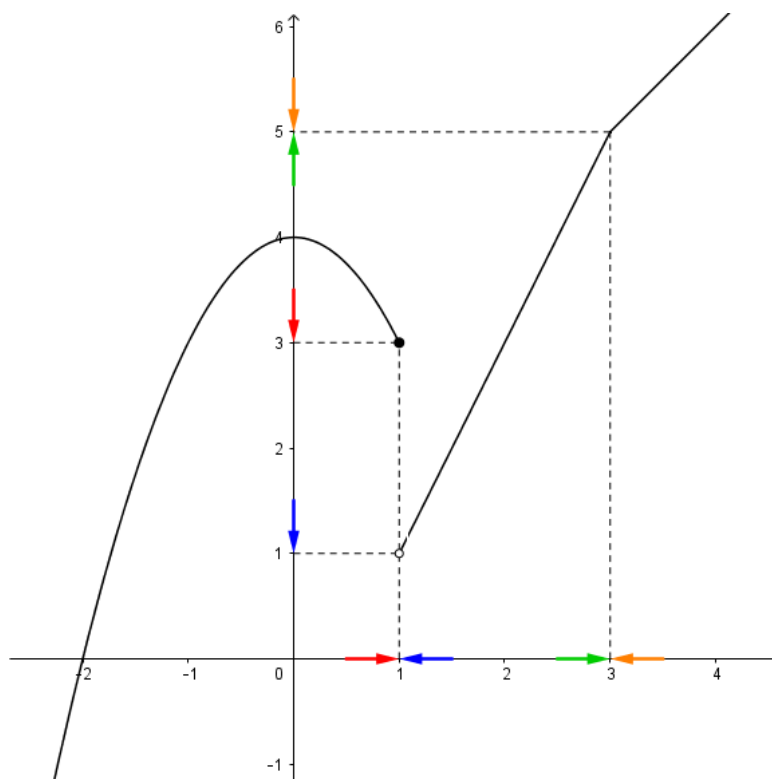
ahora calcularemos los laterales en $x_0 = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + 2 = 5$$

Como los límites laterales son iguales entonces el límite en el punto existe.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$



6.4. Límites tendiendo a infinito

Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito existe, si al crecer x indefinidamente $f(x)$ se aproxima a un valor fijo L o también crece indefinidamente. En resumen, se pueden presentar las siguientes situaciones:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \nexists$$

Operando con infinitos

Cómo ∞ no es un número sino la expresión de una variable que crece indefinidamente. Cuando operamos con éste debemos tener en cuenta esta diferencia.

En la siguiente tabla se pueden encontrar algunas operaciones con infinitos:

Sumas	Multiplicaciones	Divisiones	Potencias
$k + \infty = \infty$	$k \cdot \infty = \infty$ si $k > 0$	$\frac{k}{\infty} = 0$	$\infty^k = \infty$ si $k > 0$
$k - \infty = -\infty$	$k \cdot \infty = -\infty$ si $k < 0$	$\frac{\infty}{k} = \infty$	$\infty^k = 0$ si $k < 0$
$\infty + \infty = \infty$	$k \cdot (-\infty) = -\infty$ si $k > 0$	$\frac{k}{0} = \infty$	$k^\infty = \infty$ si $k > 1$
$\infty - \infty = \text{IND}$	$k \cdot (-\infty) = \infty$ si $k < 0$	$\frac{0}{0} = \text{IND}$	$k^\infty = 0$ si $0 < k < 1$
	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{\infty} = \text{IND}$	$\infty^\infty = \infty$
	$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$		$1^\infty = \text{IND}$
	$0 \cdot \infty = \text{IND}$		$\infty^0 = \text{IND}$
			$0^0 = \text{IND}$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3) = 2 \cdot \infty + 3 = \infty + 3 = \infty$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2 \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo 3:

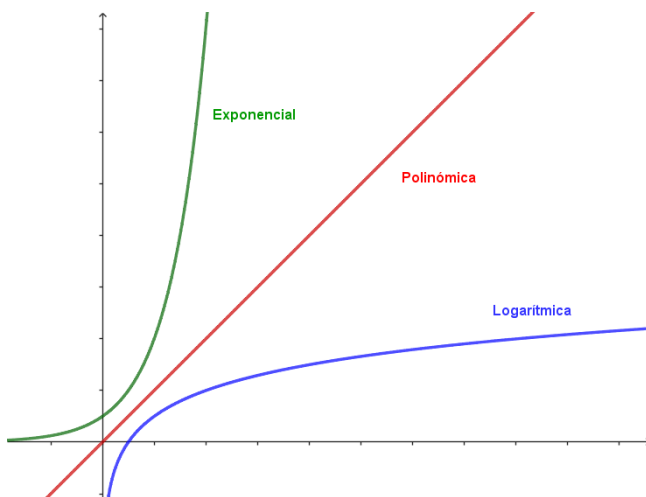
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2} = \infty^{-2} = 0$$

6.5. Límites indeterminados

Como vimos en la sección anterior, es posible que al calcular un límite nos encontremos con una indeterminación. Vamos a ver como salvar algunas de ellas.

6.5.1. Comparación de infinitos

Cuando se tienen funciones que tienden a infinito ocurre que algunas crecen a mayor velocidad que otras. Se dice entonces que las primeras tienen un infinito de orden mayor que las siguientes. Por ejemplo, las funciones exponenciales son de orden mayor que las funciones polinómicas y estas a su vez tienen un orden mayor que las funciones logarítmicas.

**Ejemplo 1:**

Analicemos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2^x)$$

Vemos que cuando $x \rightarrow \infty$ nos encontramos con una indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2^x) = \infty - \infty$$

Pero por comparación de infinitos sabemos que una función exponencial crece más rápido que una polinómica. Por lo cual el infinito del segundo término prevalece.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2^x) = -\infty$$

Ejemplo 2:

En el caso de funciones polinómicas, aquella que tenga el mayor grado será la de orden superior.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 4x^2) = \infty - \infty$$

Comparando infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 4x^2) = \infty$$

6.5.2. Cociente de polinomios

Cuando tenemos el límite tendiendo a infinito de una función que es el cociente de dos polinomios. Nos encontramos con alguno de los siguientes casos:

- Si el grado de $P >$ grado de Q

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) \text{ o sea, } \infty \text{ o } -\infty$$

- Si el grado de $P <$ grado de Q

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

- Si el grado de $P =$ grado de Q

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{b}$$

siendo a y b los coeficientes principales de P y Q , en es orden.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{3x - 1} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Como el grado del numerador es mayor:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{3x - 1} = -\infty$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x - 1}{-2x^2 + 4x^3} = \frac{\infty}{-\infty}$$

Como el grado del denominador es mayor:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2}{3x - 1} = 0$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 4}{3x + 4x^2} = \frac{-\infty}{\infty}$$

Como el grado del numerador y del denominador son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + 4}{3x + 4x^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

6.5.3. Factorización

En algunos casos podemos usar factorización para salvar límites indeterminados.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

Cuando reemplazamos la variable por -2 comprobamos que tenemos una indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Podemos simplificar la expresión factorizando por diferencia de cuadrados

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x - 2)\cancel{(x + 2)}}{\cancel{x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2)$$

Remplazando nuevamente la variable

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$$

En primer lugar reemplazamos la variable por 2 para comprobar que tenemos una indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2^2 - 2 \cdot 2}{2^2 - 4 \cdot 2 + 4} = \frac{4 - 4}{4 - 8 + 4} = \frac{0}{0}$$

Ahora factorizamos. En el numerador podemos aplicar factor común y en el denominador tenemos un trinomio cuadrado perfecto.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x(x - 2)}}{(x - 2)\cancel{(x - 2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x - 2)}$$

Remplazando la variable:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x - 2)} = \frac{2}{(2 - 2)} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

Ejemplo 3:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

Comprobamos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3 + 1}{1^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Factorizamos y simplificamos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x + 1)}(x^2 - x + 1)}{(x - 1)\cancel{(x + 1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Remplazamos la variable:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{-1 - 1} = \frac{1 + 1 + 1}{-1 - 1} = \frac{3}{-2}$$

Ejemplo 4:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x - 24}$$

Comprobamos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x - 24} = \frac{4^2 - 16}{4^2 + 2 \cdot 4 - 24} = \frac{16 - 16}{16 + 8 - 24} = \frac{0}{0}$$

Factorizamos y simplificamos:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x - 24} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{(x - 4)}(x + 4)}{\cancel{(x - 4)}(x + 6)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 4}{x + 6}$$

Remplazamos la variable:

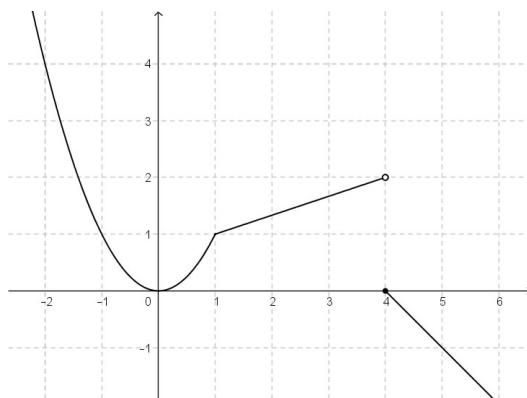
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 4}{x + 6} = \frac{4 + 4}{4 + 6} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

“Aprender es como remar contra corriente: en cuanto se deja, se retrocede.” Edward Benjamin Britten.

6.6. Actividades

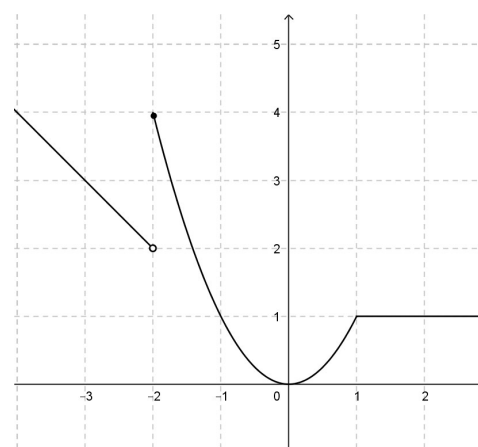
1. A partir de las siguientes gráficas, completar los límites indicados.

a)



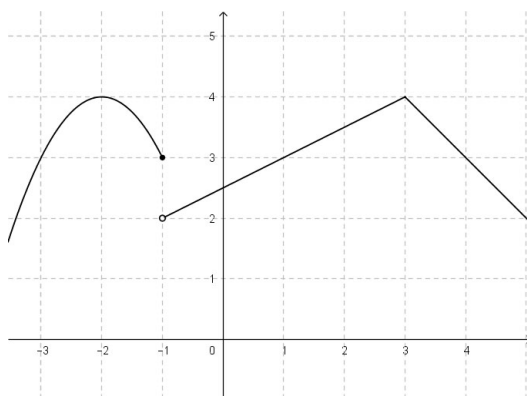
$$\begin{array}{ll} f(1) = & f(4) = \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \end{array}$$

c)



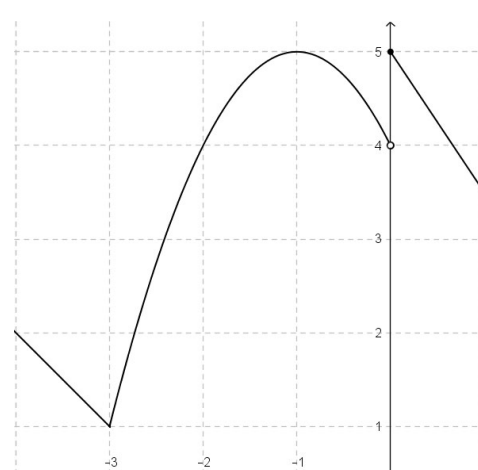
$$\begin{array}{ll} f(-2) = & f(1) = \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \end{array}$$

b)



$$\begin{array}{ll} f(-1) = & f(3) = \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \end{array}$$

d)



$$\begin{array}{ll} f(-3) = & f(0) = \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \end{array}$$

“Sin independencia económica no hay posibilidad de justicia social”. Juan Domingo Perón.

2. Calcular los siguientes límites para funciones definidas por partes.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x < 2 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= & f(2) &= \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \end{aligned}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -3 \\ \sqrt{x+7} & \text{si } -3 < x < 2 \\ x^3 - 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= & f(2) &= \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= & f(3) &= \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \end{aligned}$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2x^2 + 2x & \text{si } -2 < x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= & f(0) &= \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \\ \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \end{aligned}$$

3. Calcular los siguientes límites tendiendo a infinito.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + x) =$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2} =$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-5x + 4) =$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x) =$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} =$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

4. Calcular los siguientes límites identificando el tipo de indeterminación.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 5x) =$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 4x}{x - 2} =$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (7x - 3x^2 + x^3) =$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} =$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{x^3} =$

j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} =$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{-3x^2 + x} =$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 3x}{2x^2 - x + 2} =$

k) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} =$

f) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$

l) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9} =$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$